JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **40**, 185–265 (1981)

Espaces H^p au dessus de l'espace hermitien hyperbolique de C^n $(n > 1)$, II

AMÉDÉE DEBIARD

Université Paris-Nord, Paris, France

Communicated by Paul Malliavin

Received March 1980

Growth of harmonic functions and boundary values in a Sobolev space; comparison between the H^p space associated to Calderón Lusin's area integral and the H^p space associated to the maximal admissible function; study of Littlewood–Paley functions for the harmonic functions for the invariant laplacian of the hermitian hyperbolic space; relation between a Littlewood–Paley function and the bounded mean oscillation functions; study of H^1 and H^1 B.M.O. duality.

0. INTRODUCTION

Dans ce travail on poursuit l'étude des espaces H^p de fonctions harmoniques au dessus de l'espace hermitien hyperbolique muni de sa métrique invariante commencée dans [5]. On s'intéressera plus spécialement à l'étude globale des espaces H^p définis à l'aide de l'intégrale d'aire de Calderón Lusin. Le point de vue local ayant été étudié par Putz dans [26].

0022-1236/81/020185–81\$02.00/0

Nous démontrons que pour $1 < p < +\infty$ tous les espaces H^p coincident. (Ce résultat a paru dans [6, *Comptes Rendus* 1976].) On étudiera les horosphères, centrées au point à l'infini, munies de la métrique induite. Cela nous fournit alors un exemple de variété où apparait le comportement particulier du noyau de la chaleur pour $t \to 0$ quant la variété possède des points conjugués; ce comportement avait été étudié en général par Molchanov dans [24]. On obtient un résultat reliant la croissance des fonctions harmoniques avec le fait que les valeurs frontières sont dans un espace de Sobolev. On peut voir [9] où Feffermann et Stein, dans le cas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, déterminent des valeurs au bord distributions dans H_p pour $0 < p < 1$, ou bien [13] où Geller étudie le comportement de contractions de distributions sur le groupe de Heisenberg.

On introduit une fonction de Littlewood–Paley $G(f)$ qui est en fait un potentiel de Green du carré du gradient d'une fonction harmonique et on compare sa norme dans H^p aux normes déjà définies dans H^p. On remarque alors que la fonction de Littlewood–Paley $G(f)$ est directement liée aux fonctions à oscillation moyenne bornée ce qui avait déjà été remarqué par Gundy dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ [14]. L'étude de cette fonction $G(f)$ nous montre que les espaces H^p ou l'espace des fonctions B.M.O. peuvent tous se caractériser par le "défaut" d'harmonicité du carré des fonctions harmoniques. On utilise alors la connaissance explicité de la fonction de Green du domaine et le théorème probabiliste de dualité de H^1 B.M.O. [14] pour caractériser H^1 et démontrer que l'espace des fonctions B.M.O. est le dual de H^1.

1. Notations définitions et énoncés des principaux résultats

Nous utiliserons essentiellement les définitions et notations de [5]. Nous en rappellerons une partie et compléterons pour notre étude.

Soit D l'espace hermitien hyperbolique de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, défini par

$$D = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; h(z) = \operatorname{Im} z_1 - \sum_2^n |z_k|^2 > 0 \right\},$$

muni de sa métrique invariante $ds^2 = -\partial\bar\partial \operatorname{Log} h$. Δ est le laplacien invariant associé, ∇ le gradient. Par fonction harmonique on entendra toujours fonction C^2 annulée par Δ à valeurs réelles ou complexes. On identifiera le bord de D, $\partial D = \{z; h(z) = 0\}$, avec le groupe d'Heisenberg N de dimension $2n - 1$. On utilisera essentiellement les coordonnées horosphériques (g, s), où $s \in S = \{s; s > 0\}$ est le groupe des dilatations et $g \in N$ avec pour $z \in D$

$$s = h(z), \qquad g = (u, \tilde z), \qquad \text{où}$$

$$u = \operatorname{Re} z_1, \qquad \tilde z = z_2, \ldots, z_n, \qquad \|\tilde z\| = \left(\sum_{k=2}^n |z_k|^2 \right)^{1/2}.$$

La loi de groupe dans N étant définie par

$$g \cdot g' = (u, \tilde{z}) \cdot (u', \tilde{z}') = \left(u + u' - 2\,\mathrm{Im} \sum_{k=2}^{n} z'_k \bar{z}_k, \tilde{z} + \tilde{z}'\right)$$

pour $g \in N$, un domaine admissible de Koranyi d'ouverture a se définit, avec la jauge $|g_1|_1 = \max(|u|, \|\tilde{z}\|^2)$, par

$$\Gamma_a(g) = \{(g', s') \in D; |g^{-1} \cdot g'|_1 < as'\}.$$

Sur N la mesure euclidienne $2n - 1$ dimensionnelle $d\beta$ est invariante à gauche (d'ailleurs biinvariante).

Pour $f \in L_p(N, \beta)$ on pose $\|f\|_p = (\int_N |f(g)|^p \, d\beta(g))^{1/p}$.

La convolution de deux fonctions f et g sur N est définie par

$$f * h(g) = \int_N f(v) \, h(v^{-1} \cdot g) \, d\beta(v) = \int_N f(gv^{-1}) \, h(v) \, d\beta(v).$$

Avec $z = (g, s) \in D$ et $v \in N$ le noyau de Poisson se note $P(z, v) = P_s(g, v)$ et par invariance à gauche et symétrie [5] on a $P(z, v) = P_s(v^{-1}g, 0) = P_s(0, g^{-1}v)$. On le notera $P_s(v^{-1}g)$ et on a

$$P_s(g) = \frac{c_n s^n}{(u^2 + (s + \|\tilde{z}\|^2)^2)^n}, \qquad c_n = 2^{n-2} \pi^{-n} \Gamma(n).$$

On désignera par F une fonction définie dans D et par f (par exemple) une fonction définie sur N. Si F est harmonique dans D f sera sa valeur au bord si elle existe.

Pour $f \in L_p(N, d\beta)$ on a l'intégrale de Poisson de f définie par

$$F(g, s) = \mathrm{Poisson}[f](g, s) = f * P_s(g).$$

On a une base des champs invariants à gauche sur N

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + 2y_k \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_k = \frac{\partial}{\partial y_k} - 2x_k \frac{\partial}{\partial u},$$
$$2 \leqslant k \leqslant n, \qquad z_k = x_k + iy_k.$$

On définit l'espace de Sobolev W_p^1 $1 < p < +\infty$ sur le groupe nilpotent N. Pour f définie sur N on pose

$$|V_N f|^2 = (X_0 f)^2 + \tfrac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} \{(X_k f)^2 + (Y_k f)^2\}$$

et $\|f\|_{W_p^1} = \|f\|_p + \|\nabla_N f\|_p$.

On a alors

$$W_p^1 = \left\{ \begin{array}{l} f \in L_p(N, d\beta), X_0 f, X_k f, Y_k f, 2 \leqslant k \leqslant n, \text{existent au sens} \\ \text{des distributions et sont dans } L_p(N, d\beta). \end{array} \right\}$$

W_q^{-1} est alors le dual de l'espace de Banach W_p^1.

On peut maintenant énoncer le premier théorème.

THÉORÈME 1. *Soit F harmonique dans D et $s_k = 2^{-k}$, f_k la fonction définie sur N par $f_k(g) = F(g, s_k)$. Soit* $1 < p < +\infty$.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \|f_k\|_p < +\infty$ alors F a des valeurs au bord dans W_p^{-1}: Il existe f de W_p^{-1} telle que $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ pour la topologie faible de W_p^{-1}; de plus il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\|f_k\|_{W_p^{-1}} \leqslant C$.

On définit aussi l'intègrale d'aire de Calderón Lusin pour F définie dans D

$$A(F, a)(g) = \left(\int_{\Gamma_a(g)} \|\nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z) \right)^{1/2},$$

où $\|\nabla F\|$ désigne la longueur du gradient de F pour la métrique et $d\omega$ l'élément de volume riemannien.

$N(F, a)$ étant la fonction maximale admissible définie dans [5]. On a alors:

THÉORÈME 2. *Soit F harmonique dans D. Alors il existe une constante C ne dépendant que de a, p et n telle que pour* $0 < p < +\infty$.

$$\|A(F, a)\|_p = \|F\|_p^A \leqslant C \|N(F, a)\|_p = C \|F\|_p^N.$$

On définit l'espace H_A^p par

$$H_A^p = \left\{ F: D \to \mathbb{C}, \Delta f = 0, \|F\|_p^A < +\infty, \lim_{s \to \infty} \int_N |F(g, s)|^p \, d\beta(g) = 0 \right\}.$$

THÉORÈME 3. *Pour $1 < p < +\infty$, $H_A^p = H^p$ et les normes correspondantes sont équivalentes.*

Pour $U \times Z \in D \times D$ on note par $G(U, Z)$ la fonction de Green de D. On considère la fonction de Littlewood–Paley associée à la fonction de Green. Pour F définie dans D

$$G(F)(Z) = \left(\int_D G(Z, z) \|\nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z) \right)^{1/2}$$

et avec $Z=(g,s)$

$$\|G(F)\|_p=\sup_{s>0}\left(\int_N |G(F)(g,s)|^p\,d\beta(g)\right)^{1/p}$$

THÉORÈME 4. *Pour tout p, $2\leqslant p<+\infty$, il existe deux constantes c et d ne dépendant que de a, p et n telles que l'on ait pour toute fonction F harmonique dans D*

$$C\,\|G(F)\|_p\leqslant\|F\|_p^A\leqslant d\,\|G(F)\|_p.$$

On définit la fonction de Littlewood–Paley sur N

$$g(F)(n)=\left(\int_0^{+\infty}\|\nabla F(n,s)\|^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}.$$

THÉORÈME 5. *Pour tout p, $1<p<+\infty$, il existe deux constantes c et d ne denpendant que de a, p et n telles que pour toute fonction F harmonique dans D.*

$$C\,\|g(F)\|_p\leqslant\|F\|_p\leqslant d\,\|g(F)\|_p.$$

Définissant les fonctions à oscillation moyenne bornée (B.M.O.) sur N relativement aux boules de Koranyi on a alors.

THÉORÈME 6. *Soit $f\in$* B.M.O., *alors pour tout $1\leqslant\lambda<+\infty$, tout $s>0$ et tout $x\in N$, $|f|^\lambda * P_s(x)$ est fini et il existe une constante C, indépendante de f, telle que si $F(x,s)=f*P_s(x)$ alors*

$$\|G(F)\|_{L^\infty(D)}<C\,\|f\|_{\mathrm{B.M.O.}}.$$

RECIPROQUEMENT. *Si f est mesurable sur N et $|f|*P_1(0)$ est finie (alors f se prolongue partout par $F(x,s)=f*P_s(x)$) et si $\|G(F)\|_{L^\infty(D)}<C$, alors f est dans* B.M.O. *avec une norme équivalente.*

THÉORÈME 7. *H_0^1 étant l'ensemble des fonctions mesurables sur N telles que $\int_N f(x)\,d\beta(x)=0$ et $f\cdot P_1^{-1}$ est une fonction bornée. Alors H_0^1 est dense dans H^1.*

THÉORÈME 8. *Toute forme linéaire continue sur H^1 s'écrit*

$$\varphi(F)=\int_N\int_0^{+\infty}\nabla F(x,s)\cdot\nabla(g*P_s(x))\,d\beta(x)\frac{ds}{s},$$

où g est dans B.M.O. (*unique à une constante près*). *De plus si* $f^2 \cdot P_1^{-1}$ *est dans* $L_1(N, d\beta)$ *on a*

$$\varphi(F) = \int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x).$$

I. Croissance des fonctions harmoniques et valeurs au bord dans W_p^{-1}

On déterminera en premier lieu la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur l'horosphère Λ_s munie de la métrique induite par la métrique de Bergmann de D.

Ceci nous permettra, bien que cela ne soit pas utile pour cette étude, de fournir un exemple précis de variété riemannienne où le comportement asymptotique pour t tendant vers 0 du noyau de la chaleur diffère selon la position du point d'arrivée. Cette solution fondamentale nous servira pour une estimée cruciale de mesures harmoniques dans la démonstration du théorème 1.

Première partie. Comportement asymptotique du noyau de la chaleur de l'horosphère Λ_s le long des géodésiques

1. *Noyau de la chaleur de l'horosphère* Λ_s

On identifie Λ_s avec N et on utilisera les coordonnées $(u, x_0, y_2, \ldots, x_n, y_n)$. Un calcul facile nous montre alors que la métrique de Λ_s induite par celle de D est donnée par

$$s^2 g_{11} = \tfrac{1}{4}, \qquad s^2 g_{1,2k} = -\tfrac{1}{2} y_{k+1},$$

$$s^2 g_{1,2k+1} = \tfrac{1}{2} x_{k+1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$s^2 g_{2k,2k} = (s + y_{k+1}^2), \qquad s^2 g_{2k+1,2k+1} = (s + x_{k+1}^2),$$

$$s^2 g_{2p,2k+2} = -y_{p+1} x_{k+1}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$s^2 g_{2p,2k} = -y_{p+1} y_{k+1}, \qquad p \neq k.$$

Lemme 1.1. sX_0, $\frac{1}{2}s^{1/2}X_k$, $\frac{1}{2}s^{1/2}Y_k$, $2 \leqslant k \leqslant n$, *est une base orthonormée, pour la métrique de* Λ_s *induite par celle de* D, *de champs invariants à gauche par* N *tangents à* Λ_s.

Démonstration. Il est clair que ce sont des champs de vecteurs tangents à Λ_s. Le fait que la base soit orthonormée résulte du calcul de la métrique sur Λ_s ci-dessus.

LEMME 1.2. *Le laplacien Δ^s de l'horosphère Λ_s munie de la métrique induite par celle de D vaut:*

$$\Delta^s = s^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + s\Delta_k,$$

où Δ_k est le laplacien de Köhn.

La démonstration résulte immédiatement de celle du lemme 1.1.

La forme de l'opérateur elliptique Δ^s et le calcul effectué dans [11] du noyau de la chaleur de $4\Delta_k$ vont nous permettre de calculer le noyau de la chaleur de Δ^s.

On désignera respectivement par

$$p_t^s(v, g), \qquad p_{4,t}(v, g), \qquad p_{4,\varepsilon,t}(v, g) \qquad \text{et} \qquad p_{\varepsilon,t}(v, g),$$

la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta^s, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} 4\Delta_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}(4\Delta_k + \varepsilon^2 X_0^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 X_0^2,$$

de pôle v calculée en $g \in N$ à l'instants t, de Λ_s munie de son élément de volume $d\beta^s = d\beta/2s^n$.

Comme ces opérateurs sont invariants à gauche dans N on a $p_t^s(v, g) = p_t^s(0, v^{-1} \cdot g)$ que l'on notera $p_t^s(v^{-1} \cdot g)$ et de même pour les autres.

LEMME 1.3.

$$p_t^s(g) = \frac{1}{(2\pi t)^n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2r}{Sh\, 2r}\right)^{n-1} \times \exp\left(\frac{i\, 4ru}{st} - \frac{2\,\|\tilde{z}\|^2}{st} \cdot \frac{2r}{th\, 2r}\right) e^{-8r^2/\tau}\, dr.$$

Démonstration. Il résulte de la forme de l'opérateur $4\Delta_k + \varepsilon^2 X_0^2$ que $p_{4,\varepsilon,t}(g) = p_{4,t} * p_{\varepsilon,t}(g)$, où la convolution est effectuée sur le group N. D'après [9] on a

$$p_{4,t}(g) = \frac{1}{(2\pi t)^n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2r}{Sh\, 2r}\right)^{n-1} \exp\left(\frac{iru}{t} - \frac{\|\tilde{z}\|^2}{2t} \cdot \frac{2r}{th\, 2r}\right) dr,$$

de plus $p_{\epsilon,t}(g)$ est un noyau singulier porté par le centre qui se calcule facilement

$$p_{\epsilon,t}(g)=\frac{1}{\varepsilon(2\pi t)^{1/2}}\,e^{-u^2/2t\epsilon^2}\delta_0(\tilde{z}).$$

En intégrant sur le centre de N et en tenant compte de la valeur de $p_{4,t}(g)$ et du fait que

$$\frac{1}{\varepsilon(2\pi t)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iru'/t}e^{-u'^2/2t\epsilon^2}\,du'=e^{-r^2\epsilon^2/2t}$$

on a

$$p_{4,\epsilon,t}(g)=\frac{1}{(2\pi t)^n}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{2r}{sh\,2r}\right)^{n-1}$$
$$\times\exp\left(\frac{iru}{t}-\frac{\|\tilde{z}\|^2}{2t}\cdot\frac{2r}{th\,2r}\right)e^{-r^2\epsilon^2/2t}\,dr.$$

Remarque. Lorsque ε tend vers 0 $p_{4,\epsilon,t}(g)$ converge vers $p_{4,t}(g)$. Ce qui fait que l'on approxime la solution fondamentale de l'équation de la chaleur d'un opérateur hypoelliptique par celle d'un opérateur elliptique on a

$$p_t^4(g)=p_{4,4,t}(g).$$

Le groupe S des dilatations agit par isométrie sur D et les horosphères sont isométriques entre elles par action de S:

$$A_{s,s'}=s'A_s,$$

de sorte que l'on a

$$p_t^s(g)=p_t^4(4/s\cdot g),$$

d'où le résultat annoncé.

Dans toute la suite de cette première partie on suppose que $n=2$ et $s=1$ et on pose $g=(u,z)$, $z=x+iy$ et on utilisera l'indexation $(1,2,3)$ pour (u,x,y).

2. *Courbure sectionnelle de l'horosphère A_1*

On calcule les coefficients de la connexion à partir de ceux de la métrique déterminés au paragraphe 1

$$\Gamma_{2,13}=\Gamma_{2,31}=-\Gamma_{3,12}=-\Gamma_{3,21}=-2,$$
$$\Gamma_{2,23}=\Gamma_{2,32}=4y,\qquad \Gamma_{3,23}=\Gamma_{3,32}=4x,$$
$$\Gamma_{3,22}=-8y,\qquad \Gamma_{2,33}=-8x,$$

tous les autres coefficients étant nuls.

On calcule alors les coefficients du tenseur de courbure

$$R_{12,12}=1, \qquad R_{13,13}=1, \qquad R_{23,23}=4(y^2+x^2-3),$$
$$R_{12,13}=0, \qquad R_{12,23}=-2x, \qquad R_{13,23}=-2y,$$

tous les autres coefficients étant connus à partir de ceux-ci.

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\wedge\frac{\partial}{\partial x}\right|^2=4, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial u}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\right|^2,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\right|^2=16(1+x^2+y^2),$$

d'où les courbures sectionnelles des sections correspondantes

$$K\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial x}\right)(g)=\frac{1}{4}, \qquad K\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial y}\right)(g)=\frac{1}{4},$$
$$K\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(g)=\frac{x^2+y^2-3}{4(1+x^2+y^2)},$$

ou avec les champs invariants à gauche

$$K(X_0,X_2)=K(X_0,Y_2)=\tfrac{1}{4}, \qquad K(X_2,Y_2)=-\tfrac{3}{4},$$

de sorte que l'on a des deux plans de courbure négative, d'autres de courbure positive et d'autres de courbure nulle [30].

3. *Géodésiques de l'horosphère Λ_1*

On ne s'intéressera qu'aux géodésiques issues de 0 les autres étant obtenues par action à gauche de N. Pour déterminer les géodésiques de Λ_1 nous utiliserons la méthode variationnelle d'Hamilton Jacobi [25, pp. 227–235].

L'hamiltonien de Δ^1 vaut

$$H=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)+ypr-xqr+(x^2+y^2+1)\,r^2\right],$$

où p, q et r sont les variables conjuguées de x, y, u. D'où les équations due mouvement.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{4}+\frac{yr}{2}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{q}{4}-\frac{xr}{2},$$
$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{qr}{2}-xr^2, \qquad \frac{dq}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{p^2}{2}-yr^2,$$
$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial u}=0, \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{2}(yp-xq)+(x^2+y^2+1)\,r.$$

On a déjà $r = r_0 =$ constant.

1. Si $r_0 = 0$ on a $p = p_0$ $q = q_0$, $x = (p_0/4)\,t$, $y = (q_{0/}4)\,t$, et $u = u_0$. Ce sont les droites du plan $u = u_0$.

2. On suppose que $r_0 \neq 0$ et l'on a un système différentiel du premier ordre à coefficients constants que l'on intègre facilement:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(Y-1) - bX, \\ y(t) &= -b(Y-1) - aX, \\ p(t) &= -2br_0(Y+1) - 2ar_0 X, \\ q(t) &= -2ar_0(Y+1) + 2br_0 X. \\ u(t) &= (2(a^2+b^2)+1)\,r_0 t - 2(a^2+b^2)\,X, \end{aligned}$$

où $X = \sin r_0 t$, $Y = \cos r_0 t$ et r_0, a, b sont les conditions initiales.

Le long des géodésiques le mouvement s'effectue à vitesse C constate et

$$C^2 = \left(p\,\frac{dx}{dt} + q\,\frac{dy}{dt} + r\,\frac{du}{dt}\right)(0)$$

d'où la longueur de la géodésique de paramètres r_0, a et b entre les instants 0 et t

$$l = (4(a^2+b^2)+1)^{1/2}\,r_0 t$$

et l'intégrale d'action $I = (4(a^2+b^2)+1)\,r_0^2 t$. On a les relations

$$x^2(t) + y^2(t) = 4(a^2+b^2)\sin^2\frac{r_0 t}{2},$$

$$(x(t)+a)^2 + (y(t)-b)^2 = a^2+b^2.$$

3.1. Géodésiques joignant l'origine à $g_0 = (u_0, 0, 0)$ pendant l'intervale de temps t_0 avec $u_0 > 0$, par exemple.

On a

$$0 = x_0^2 + y_0^2 = 4(a^2+b^2)\sin^2\frac{r_0 t_0}{2}.$$

(a) $a^2 + b^2 = 0$ et l'on a comme géodésique γ_0 le segment $(0, g_0)$ parcouru à vitesse uniforme $u = r_0 t$; la longueur de cette géodésique est $u_0 = r_0 t_0$.

(b) $a^2 + b^2 \neq 0$ de sorte que $r_0 t_0 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors $u_0 = (2(a^2+b^2)+1)\,r_0 t_0 = (2(a^2+b^2)+1)\,2k\pi$ et $r_0 > 0$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Ceci n'étant possible que si $u_0 > 2\pi$. Supposons donc $2p\pi < u_0 \leqslant 2(p+1)\pi$, $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a alors $(u_0 - 2k\pi)/k\pi = 4(a^2+b^2)$, d'où $k \in \{1, 2, ..., p\}$. Ce qui donne la famille de géodésiques indexées par k:

$$k, r_0 = \frac{2k\pi}{t_0}; \qquad a_k^2 + b_k^2 = \frac{u_0 - 2k\pi}{k\pi}.$$

Pour un couple (a_k, b_k) on a une géodésique $\gamma_k^{(a,b)}$ qui est une hélice circulaire de cercle de base passant par 0 parcouru k fois à vitesses uniforme. Toutes ces géodésiques ont même longueur $l_k = 2[(u_0 - k\pi)\,k\pi]^{1/2}$.

En résumé si $0 < u_0 \leqslant 2\pi$: Une seule géodésique γ_0, $l_0 = u_0$; $(2\pi, 0, 0)$ est un point conjugué de l'origine.

Si $2p\pi < u_0 \leqslant 2(p+1)\pi$: En plus de γ_0 nous avons les p familles de géodésiques $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_p$ et l'on a

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_p < l_0,$$

d'où la distance $d(0, g_0) = 2[(u_0 - \pi)\,\pi]^{1/2}$.

3.2. Géodésiques joignant l'origine à $g_0 = (0, x_0, y_0)$.

Si $r_0 t_0 \neq 0$ on a $u_0 \neq 0$, d'où $r_0 = 0$. Une seule géodésique joignant 0 à g_0: le segment de droite parcouru à vitesse uniforme et $d(0, g_0) = 2\,\|z_0\|$ et l'on n'a pas de points conjugués dans le plan $u = 0$.

3.3. Géodésiques joignant l'origine à $g_0 = (u_0, z_0)$, $u \neq 0$, $\|z_0\| \neq 0$.

On a déjà $r_0 t_0 \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En résolvant dans les équations en $x(t)$ et $y(t)$ à $t = 0$ on trouve un couple unique (a, b). En utilisants l'équation en $u(t)$ on a en posant $rs_0 = 2\lambda$

$$u_0 = \frac{\|z_0\|^2}{2}\left(\frac{2\lambda - \sin 2\lambda}{\sin^2\lambda}\right) + 2\lambda = \frac{\|z_0\|^2}{2}\,\theta(\lambda) + 2\lambda = \varphi(\lambda),$$

où $\theta(\lambda) = (2\lambda - \sin 2\lambda)/\sin^2\lambda$ est la fonction utilisée dans [11] et est une bijection strictement croissante de $[0, \pi[$ sur $[0, +\infty[$ il en est donc de même de $\varphi(\lambda)$. D'où un unique $\lambda \in [0, \pi[$ tel que $U_0 = \varphi(\lambda)$ et une seule géodésique correspondante de paramètres initiaux r, a, b. Pour déterminer les autres géodésiques pour $\lambda \in [k\pi(k+1)\pi[$ il faut discuter suivant les valeurs de u_0 le nombre de solutions de $\varphi(\lambda) = u_0$. Ce que l'on ne fera pas ici puisqu'on veut mettre en évidence, seulement, le comportement particulier du p_t^1 pour $t \to 0$.

4. *Comportement asymptotique du noyau de la chaleur pour t tendant vers* 0

Dans le plan $u = 0$, la courbure sectionnelle du 2 plans $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ est $-3/4$, il n'y a pas de points conjugués de l'origine de sorte que le noyau de la chaleur a le comportement classique [29]. On regardera donc le cas où g est dans le centre où il y a des points conjugués de l'origine et l'on verra apparaître le phénomène mentionné par Molchanov dans [24]. (La courbure sectionnelle du 2 plans $(\partial/\partial u, \partial/\partial y)$ est 1/4.)

$$p_t^1(u, 0, 0) = \frac{1}{(2\pi t)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{2r}{Sh\, 2r} e^{i4(ru/t)} e^{-8r^2/t}\, dr.$$

On utilisera la méthode de la phase stationnaire [8] pour calculer $p_t^1(u, 0, 0)$.

Le phase est $\varphi(r) = i\, 4ru - 8r^2$, $\varphi'(r) = 0 \Leftrightarrow r = iu/4$,

$$r = \alpha + i\beta, \qquad \operatorname{Re} \varphi(r) = 4(2(\beta^2 - \alpha^2) - \beta u), \qquad \operatorname{Im} \varphi(r) = 4\alpha(u - 4\beta),$$

si $\beta = u/4$, $\operatorname{Im} \varphi(r) = 0$, dans le cas où $2k\pi < u < 2(k+1)\pi$ on intègre sur le contour

$$-R \leqslant \alpha \leqslant R, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = R, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{u}{u},$$

$$-R < \alpha < R, \qquad \beta = \frac{u}{4}, \qquad \alpha = -R, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{u}{4}.$$

Un calcul élémentaire de résidus nous donne alors

$$p_t^1(u, 0, 0) = \frac{e^{-u^2/2t}}{(2\pi t)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha Sh\, 2\alpha \cos 2u + 2u \sin 2u Ch\, 2\alpha}{Sh^2\, 2\alpha + \sin^2 2u} e^{-2\alpha^2/t}\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{4t^2} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} p e^{1/t(-2p\pi u + p^2\pi^2/2)},$$

où $2k\pi < u < 2(k+1)\pi$.

Cas particulier où $u = 2k\pi$. Il y a un pôle sur le contour précédent au point $(\alpha = 0,\ \beta = k\pi/2)$. On évite le pôle par la méthode habituelle sans oublier le demi résidu correspondant et l'on obtient

$$p_t^1(2k\pi, 0, 0) = (-1)^k \frac{e^{-u^2/2t}}{(2\pi t)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{Sh\, 2\alpha} e^{-2\alpha^2/t}\, d\alpha$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{8t^2} k e^{1/t(-2k\pi u + k^2\pi^2/2)}$$
$$+ \frac{1}{4t^2} \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{p+1} p e^{1/t(-2p\pi u + p^1\pi^2/2)}.$$

La méthode du Col [8] nous montre que pour $t \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{Sh^2\alpha} e^{-2\alpha^2/t}\, d\alpha \sim (2\pi t)^{1/2}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha\, Sh\, 2\alpha \cos 2u + 2u \sin 2u\, Ch\, 2\alpha}{Sh^2 2\alpha + \sin^2 2u} e^{-2\alpha^2/t}\, d\alpha \sim \frac{2u}{\sin 2u} (2\pi t)^{1/2},$$

d'où si $0 < u < 2\pi$ nous sommes avant le point conjugué et

$$p_t^1(u, 0, 0) \approx \frac{2u}{(2\pi t)^{3/2} \sin 2u} e^{-u^2/2t} \qquad t \to 0$$

nous sommes dans la situation classique

$$u = d(0, g), \qquad \text{où} \qquad g = (u, 0, 0),$$

et la puissance de t est égale à $\frac{1}{2}\dim \Lambda_1$ comme on pouvait le prévoir.

Si $u = 2\pi$ on a

$$p_t^1(2\pi, 0, 0) \approx -\frac{e^{-2\pi^2/t}}{(3\pi t)^{3/2}} + \frac{e^{-7\pi^2/2t}}{8t^2},$$

et la puissance de t dominante est 2 de même pour $2k\pi < u < 2(k+1)\pi$. On a $k+1$ faisceaux de géodésiques et le comportement du p_t^1 est pour $t \to 0$

$$p_t^1(u, 0, 0) \approx \frac{2u}{(2\pi t)^{3/2} \sin 2u} e^{-u^2/2t} + \frac{1}{4t^2} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} p e^{1/t(-2p\pi U + p^2\pi^2/2)}$$

et de même pour $u = 2k\pi$.

Deuxième partie. Démonstration du théorème 1

Soit F harmonique réelle dans D, $s_k = 2^{-k}$ $k \in \mathbb{N}$ et f_{s_k} (notée f_k) la fonction de N dans $\mathbb{R}$ définie par $N \ni g \to f_k(g) = F(g, s_k)$. On suppose que $\|f_k\|_p$ est fini pour tout $k \in \mathbb{N}$. On considère $\varphi \in W_q^1$ ($p > 1$, $1/p + 1/q = 1$).

On pose $\langle f_k, \varphi \rangle = \int_N f_k(g) \varphi(g)\, d\beta(g)$ et l'on a $\langle f_M, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{M-1} \langle (f_{k+1} - f_k), \varphi \rangle + \langle f_0, \varphi \rangle$.

Comme $|\langle f_0, \varphi \rangle| \leqslant \|f_0\|_p \|\varphi\|_q$ il suffit d'estimer $\langle (f_{k+1} - f_k), \varphi \rangle$.

On note par $P_{k,k+1}$ le noyau de Poisson partant du niveau s_k pour aller sur le niveau s_{k+1} relativement à la mesure invariante $d\beta$ du groupe d'Heisenberg. Chaque horosphère est une orbite du groupe nilpotent et sur l'horosphère Λ_s on a la mesure invariante $d\beta^s = d\beta/2s^n$ induite par la mesure de volume sur l'espace hermitien hyperbolique muni de la métrique de Bergman. Pour plus de commodité on normalise tout par rapport à la mesure $d\beta$ pour ne considérer "qu'un échantillon du groupe nilpotent". Avec ces notations $P_{k,k+1}(g_0, g)\, d\beta(g)$ est la mesure harmonique partant du point (g_0, s_k) de Λ_{s_k} pour aller sur l'horosphère de niveau $s_{k+1} \cdot N$ agissant part isométrie sur chaque horosphère on a

$$P_{k,k+1}(g_0, g) = P_{k,k+1}(0, g_0^{-1} \cdot g).$$

On utilisera alors la notation $P_{k,k+1}(0, g) = P_{k,k+1}(g)$ et on peut donc faire agir le noyau de Poisson $P_{k,k+1}$ comme un noyau de convolution sur N. De sorte que F étant une fonction harmonique dans D et $f_{k+1} \in L_p(N, d\beta)$ on peut calculer les valeurs de F sur le niveau s_k à l'aide du noyau de Poisson.

$$f_k(g_0) = \int_N P_{k,k+1}(g^{-1} \cdot g)\, f_{k+1}(g)\, d\beta(g) = f_{k+1} * P_{k,k+1}(g_0).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle (f_{k+1} - f_k), \varphi \rangle &= \langle (f_{k+1} - f_{k+1} * P_{k,k+1}), \varphi \rangle \\ &= \int_N (f_{k+1}(g_0) - \int_N f_{k+1}(g) \\ &\quad \times P_{k,k+1}(g^{-1} \cdot g_0)\, d\beta(g))\, \varphi(g_0)\, d\beta(g_0).\end{aligned}$$

Comme le noyau de Poisson a pour masse 1 cela donne

$$\begin{aligned}&\langle (f_{k+1} - f_k), \varphi \rangle \\ &\quad = \int_N f_{k+1}(g)\, d\beta(g) \int_N P_{k,k+1}(u)(\varphi(g) - \varphi(gu))\, d\beta(u).\end{aligned}$$

On va estimer $|\varphi(g \cdot u) - \varphi(g)|$. Soit X tel que $u = \exp X$ on a alors

$$\varphi(g \cdot u) - \varphi(g) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \varphi(g \cdot \exp sX)\, ds.$$

Si $\tilde{X}$ est le champ invariant à gauche engendré par X

$$\varphi(g \cdot u) - \varphi(g) = \int_0^1 \tilde{X}(\varphi(g \cdot \exp sX))\, ds,$$

φ est une fonction sur le groupe d'Heisenberg que l'on prolonge dans D par

$$\varphi(g, s) = \varphi(g) \qquad \text{pour tout} \quad s > 0.$$

Maintenant on a

$$\int_0^1 |\tilde{X}(\varphi \mid g \cdot \exp sX))| \, ds$$

$$\leqslant d_{k+1}(g \cdot \exp X, g) \int_0^1 \| V\varphi_{k+1}(g \cdot \exp sX\| \, ds,$$

où $d_{k+1}(g \cdot \exp X, g)$ est la distance géodésique sur l'horosphère de niveau s_{k+1} entre les points $(g \cdot \exp X, s_{k+1})$ et (g, s_{k+1}), φ_{k+1} est la restriction de φ à l'horosphère $\Lambda_{s_{k+1}}$ et $\| V\varphi_{k+1}\|$ est la norme du gradient pour la métrique sur l'horosphère induite par la métrique invariante de D. Toujours par action isométrique de N sur chaque horosphère on a

$$d_{k+1}(g \cdot \exp X,\, g) = d_{k+1}(\exp X, 0) = d_{k+1}(0, u).$$

De plus à l'aide de la base orthonormée de champs invariants à gauche du lemme 1.1 on a

$$\| V\varphi_{k+1}\|^2 = s_{k+1}^2 (X_0 \varphi_{k+1})^2 + \frac{s_{k+1}}{4} \sum_{p=2}^{n} [(X_p \varphi_{k+1})^2 + (Y_p \varphi_{k+1})^2],$$

d'où

$$\| V\varphi_{k+1}\| \leqslant s_{k+1}^{1/2} \| V_N \varphi\|.$$

Remarquons qu'on perd en prenant la distance d_k qui est de l'ordre de $s_k^{-1/2}$ mais on gagne sur la longueur du gradient.

On a donc puisque $\int_0^1 \| V_N \varphi(g \cdot \exp sX)\| \, ds = \| V_N \varphi(g \cdot u_1)\|$, où u_1 dépend de u

$$|\langle f_{k+1} - f_k), \varphi\rangle \leqslant s_{k+1}^{1/2} \int_N |f_{k+1}(g)| \cdot \| V_N \varphi(g \cdot u_1)\| \, d\beta(g)$$

$$\times \int_N P_{k,k+1}(u) \, d(0, u) \, d\beta(u)$$

de plus

$$\int_N f_{k+1}(g) \cdot \| V\varphi(g \cdot u_1)\| \, d\beta(g) \leqslant \|f_{k+1}\|_p \, \| \, \| V_N(\varphi\| \, \|_{L_q(d\beta)},$$

d'où

$$|\langle (f_{k+1} - f_k), \varphi\rangle| \leqslant 2^{-1/2(k+1)} \|f_{k+1}\|_p \cdot \|\varphi\|_{W_q^1} \times \left(\int_N P_{k,k+1}(u)\, d_{k+1}(0,u)\, d\beta(u)\right).$$

LEMME 1. *$\int_N P_{k,k+1}(g)\, d_{k+1}(0,g)\, d\beta(g)$ est borné indépendamment de k par une constante C.*

Admettons pour le moment ce lemme et terminons la démonstration du théorème 1.

La majoration du lemme 1 nous donne

$$|\langle f_M, \varphi\rangle| \leqslant \|f_0\|_p \cdot \|\varphi\|_q + C\|\varphi\|_{W_q^1}\left(\sum_{k=1}^{M} 2^{-k}\|f_k\|_p\right) = C\|\varphi\|_{W_q^1}\left(\sum_{k=0}^{M} 2^{-k}\|f_k\|_p\right).$$

De sorte que si la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\|f_k\|_p$ converge avec pour somme S alors f_M converge, pour $M \to \infty$, faiblement vers un élément f de W_p^{-1} et de plus pour tout $M \in \mathbb{N}$ $\|f_M\|_{W_p^{-1}} \leqslant CS$.

Remarque. En définissant l'espace W_p^{-2} et en utilisant les théorèmes d'injection de Sobolev on peut montrer que f_M converge fortement dans W_p^{-2} vers f.

Démonstration du lemme 1. Pour effectuer l'estimée demandée on va utiliser la diffusion sur D associée au laplacien de Bergmann et sa factorisation [5, 22].

Soit Ω l'espace de probabilité de la diffusion $X_\omega(t)$ sur D de générateur $\frac{1}{2}\Delta$. On note par $E_{(g,s)}$ l'espérance mathématique partant de (g,s) et $P_{(g,s)}$ la probabilité correspondante. On appele τ_k le premier temps de passage sur l'horosphère Λ_{s_k} et l'on a

$$E_{(0,s_k)}[d_{k+1}(0, X_\omega(\tau_{k+1})] = \int_N P_{k,k+1}(g)\, d_{k+1}(0,g)\, d\beta(g).$$

Nous savons que $\Delta = \Delta^s + \Delta_R$, où $\Delta_R = s^2\partial^2/\partial s^2 - (n-1)\, s(\partial/\partial s)$, est le laplacien radial. Ω_0 étant l'espace de probabilité du brownien b sur $\mathbb{R}$, la diffusion $s_{\omega_0}(t)$ sur $\mathbb{R}^+$ de générateur $\frac{1}{2}\Delta_R$ partant à $t = 0$ de s_0 s'écrit

$$s_{\omega_0}(t) = s_0 \exp(b_{\omega_0}(t) - nt),$$

Ω_1 étant l'espace de probabilité de la diffusion $g_{\omega_1}(t)$, sur N, de générateur $\frac{1}{2}\Delta^{s_{\omega_0}}$ partant de 0 à $t=0$.

D'après la proposition 1.6 de [5] on a à un isomorphisme près d'espaces de probabilités

$$X_\omega(t) = (g_{\omega_1}(t), s_0 \exp(b_{\omega_0}(t) - nt)).$$

Le premier temps d'atteinte de $A_{s_{k+1}}$ partant de A_{s_k} ne dépend que du hasard ω_0 et on le note τ^k_{k+1}

$$\begin{aligned}\tau^k_{k+1}(\omega) = \tau^k_{k+1}(\omega_0) &= \inf\{t > 0;\, 2^{-k} \exp(b\omega_0(t) - nt) \leqslant 2^{-(k+1)}\}\\ &= \inf\{t > 0; \exp(b\omega_0(t) - nt) \leqslant 2^{-1}\} = \tau^1_2(\omega_0),\end{aligned}$$

notant par E_0 l'espérance correspondant à Ω_0 et E_1 celle de Ω_1 on a

$$E_{(0,s_k)}[d_{k+1}(0, X_\omega(\tau^k_{k+1}(\omega)))] = E_0[E_1[d_{k+1}(0, g_{\omega_1}(\tau^k_{k+1}(\omega_0))]].$$

On va donc en premier lieu estimer $E_1(d_{k+1}(0, g_{\omega_1}(t)))$.

Toujours par action isométrique du groupe des dilatations il suffit d'effectuer l'estimée sur une horosphère fixée. Pour la même raison

$$\int_N P_{k,k+1}(g)\, d_{k+1}(0, g)\, d\beta(g)$$

ne dépend pas de k.

LEMME 2. *Il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que pour tout $t > 0$*

$$E_1(d_1(0, g_{\omega_1}(t))) \leqslant C_1 + C_2 t.$$

Admettons pour le moment ce lemme et terminons la preuve du lemme 1. On a alors

$$\int_N P_{k,k+1}(g)\, d_{k+1}(0,g)\, d\beta(g) \leqslant C_1 + C_2 E_0(\tau^1_2(\omega_0)).$$

τ^1_2 est le premier temps de passage en $-\text{Log}\, 2$ de la diffusion sur $\mathbb{R}$ partant de 0 de générateur $d^2/dx^2 - (n-1)(d/dx)$.

Si l'on considère la diffusion partant de x et on appelle τ le premier temps de passage en y, on a en posant $E_x(e^{-\lambda\tau}) = \varphi_\lambda(x, y) = \Psi(x)$ $(\lambda > 0)$ comme fonction de x, $\Psi(y) = 1$, $\Psi(\infty) = 0$ et Ψ vérifié l'équation différentielle

$$\Psi'' - (n-1)\,\Psi' - \lambda\Psi = 0$$

(voir [10, p. 478]) d'où

$$\varphi_\lambda(x, y) = \exp\left[\frac{n-1-((n-1)^2+4\lambda)^{1/2}}{2}\right](x-y);$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{d\varphi}{d\lambda}(x, y) = \frac{y-x}{n-1} = E_x(\tau),$$

d'où

$$\int_N P_{k,k+1}(g)\, d_{k+1}(0, g)\, d\beta(g) \leqslant C_1 + \frac{C_2 \operatorname{Log} 2}{n-1}.$$

Démonstration du lemme 2. Nous avons

$$I = E_1(d_1(0, g_{\omega_1}(t))) = \int_N p_t^1(g)\, d_1(0, g)\, d\beta(g),$$

où p_t^1 a été calculé au cours de la première partie. Il résulte aussi du calcul des longueurs des géodésiques, la majoration est élémentaire en dimension n, que

$$d(0, g) \leqslant d(0, (u, 0, 0)) + d((u, 0, 0), g) \leqslant |u| + 2\,\|\tilde{z}\|,$$

$$I < \frac{1}{(2\pi t)^n}\int_{\mathbb{R}_{2n-1}} (|u| + 2\,\|\tilde{z}\|)\, du\, d\tilde{z}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{2r}{sh\, 2r}\right)^{n-1}\right.$$
$$\left.\times \exp\left(\frac{i\, 4ru}{t} - \frac{4\,\|\tilde{z}\|^2}{2t}\cdot\frac{2r}{th\, 2r}\right) e^{-8r^2/t}\, dr\right).$$

On calcule

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{2(n-1)}} (|u| + 2\,\|\tilde{z}\|)\, e^{(-2\|\tilde{z}\|^2/t)c^2}\, dz, \qquad c^2 = \frac{2r}{th\, 2r},$$

$$= \frac{2\pi^{r-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{+\infty} (|u| + 2\rho)\, e^{-2\rho^2c^2/t}\rho^{2n-3}\, d\rho,$$

$$I_1 = \frac{k_n t^{n-1}}{c^{2(n-1)}}\left[|u|\int_0^{+\infty} v^{2n-3}e^{-v^2}\, dv\right.$$
$$\left. + \frac{t^{1/2}}{c}\int_0^{+\infty} v^{2(n-1)}e^{-v^2}\, dv\right],$$

où k_n est une constante; de même k_n', k_n'', k_n^1 et k_n^2.

Notons par λ_n la constante $\int_0^{+\infty} v^n e^{-v^2}\,dv$

$$I_1 = \frac{k_n t^{n-1}}{c^{2(n-1)}}\left(|u|\,\lambda_{2n-3} + \frac{t^{1/2}}{c}\lambda_{2n-2}\right).$$

On intègre maintenant en r

$$\frac{1}{(2\pi t)^n}\int_{\mathbb{R}} I_1 \left(\frac{2r}{\operatorname{sh} 2r}\right)^{n-1} \exp\left(\frac{i\,4ru}{t} - \frac{8r^2}{t}\right) dr = J_1(u) + J_2(u)$$

$$J_1(u) = \frac{k_n'}{t}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{(ch\,2r)^{n-1}} \exp\left(\frac{i\,4ru}{t} - \frac{8r^2}{t}\right) dr,$$

$$J_2(u) = \frac{k_n''}{t^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{th(2r)^{1/2}}{(2r)^{1/2}\,(ch\,2r)^{n-1}} \exp\left(\frac{i\,4ru}{t} - \frac{8r^2}{t}\right) dr,$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} J_1(u)\,du &= k_n^1 t \int_{\mathbb{R}} |v|\,dv \int_{\mathbb{R}} \exp ir\cdot v \left[\frac{e^{-8r^2/t}}{(ch\,2r)^{n-1}}\right] dr \\ &\leqslant C_1^{ste} t,\\ \int_{\mathbb{R}} J_2(u)\,du &= k_n^2 t^{1/2} \int_{\mathbb{R}} dv \int_{\mathbb{R}} \exp irv \left[\frac{(th\,2r)^{1/2}}{(2r)^{1/2}\,(ch\,2r)^{n-1}}\right] e^{-8r^2/t}\,dr \\ &\leqslant C_2^{ste} t^{1/2},\end{aligned}$$

d'où

$$I \leqslant C_1 t + C_2 t^{1/2} \leqslant C_2 + C_t' t.$$

Remarque. Le lemme 1 est faux dans le demi-plan de Poincaré ou dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|x\|\,dx}{(\|x\|^2 + 1)^{n+1/2}} = +\infty,$$

où $\|x\|$ est la norme euclidienne et dx la mesure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Mais dans la situation envisagée ici le noyau de Poisson a un meilleur comportement à l'infini (voir aussi le critère d'intégrabilité des fonctions B.M.O. du chapitre V). En effet, se plaçant sur l'horosphère Λ_1 on a

$$\int_N p_1(g)\,d_1(0, g)\,d\beta(g) \leqslant \int_{\mathbb{R}^{2n-2}} d\tilde{z}\,\frac{|u| + 2\,\|\tilde{z}\|}{(u^2 + (1 + \|\tilde{z}\|^2)^2)^n}\,du < +\infty.$$

D'un autre côté dans le demi-plan de Poincaré ou dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la diffusion radiale a pour générateur d^2/dx^2 sans force de rappel $(n-1)(d/dx)$. Dans ce cas on a

$$E_x(e^{-\lambda\tau}) = e^{-\lambda^{1/2}(x-y)} \qquad \text{et} \qquad E_x(\tau) = +\infty.$$

La majoratante est donc infinie!

II. Fonctions de répartition de l'intégrale d'aire de Calderón Lusin et de la fonction maximale admissible

1. *Préliminaires*

On sait que si $F \in H^p$, $1 < p < +\infty$, et si f est la valeur au bord de f alors $F = \text{Poisson}[f]$ et $\|F\|_p = \|f\|_{L_p(N, d\beta)}$.

On rappelle le théorème suivant de Koranyi et Vagi [21].

Théorème 1.1. *Soit $f \in L_p(N, d\beta)$ $(1 < p < +\infty)$ à valeurs réelles et $F = \text{Poisson}[f]$. Alors il existe une constante C ne dépendant que de a, p et n telle que*

$$\|F\|_p^A \leqslant C \|f\|_p.$$

On va généraliser ce théorème au cas où $0 < p < +\infty$ en remplaçant f par la fonction maximale admissible $N(F, a)$ définie dans [5]. (Le résultat est faux pour $0 < p \leqslant 1$ avec $\|F\|_p$.) Compte tenu du fait que pour $1 < p < +\infty$ $\|F\|_p^N \approx \|F\|_p$ (théorème 2.3 de [5]) cela permettra de retrouver le théorème 1.1 sans utiliser des intégrales singulières sur des espaces homogènes. Comme on utilisera des fonctions de distributions on aura en fait une version plus générale:

Soit ϕ une fonction de $[0, +\infty]$ à valeurs réelles telle que $0 < \phi(1) < +\infty$

$$\phi(b) = \int_0^b \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad 0 \leqslant b < +\infty,$$

où φ est mesurable positive et vérifie la condition de croissance

$$\varphi(2\lambda) \leqslant c\varphi(\lambda)$$

de sorte que ϕ est finie pour tout $b \in [0, +\infty[$ et ϕ vérifie une condition de croissance du même type que φ. Soit $\rho > 0$ et k le plus petit entier tel que $\rho \leqslant 2^k$ alors

$$\phi(\rho b) \leqslant \phi(2^k b) = \int_0^{2^k b} \varphi(\lambda)\, d\lambda = 2^k \int_0^b \varphi(2^k \lambda)\, d\lambda = (2c)^k\, \phi(b).$$

Par example, $\phi(b) = b^p$, $0 < p < +\infty$; $\phi(b) = \mathrm{Log}(b+1)$, $\phi(b) = (b+1)$ $\mathrm{Log}(b+1)$.

THÉORÈME 1.2. *Soit F harmonique dans D alors il existe une constante C ne dépendant que de a, n et ϕ telle que*

$$\int_N \phi(A(F,a)(g))\, d\beta(g) \leqslant C \int_N \phi(N(F,a)(g)\, d\beta(g).$$

Pour démontrer le théorème 1.2 on utilisera la méthode employée par Burkholder et Gundy [1] dans le cadre de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$.

2. *Inégalités entre les fonctions de répartition*

R étant une partie de D on pose

$$N_{a,R}(x) = \sup_{(g,s) \in \Gamma_a(x) \cap R} |F(g,s)|, \qquad N_a(x) = N(F,a)(x),$$

$$N_{a,k}(x) = \sup_{(g,s) \in \Gamma_a(x) \cap \{(g,s) \mid s \leqslant k\}} |F(g,s)|,$$

de même la fonction maximale du gradient

$$D_a(x) = \sup_{(g,s) \in \Gamma_a(x)} \|\nabla F(g,s)\|, \qquad D_{a,R} = \sup_{(g,s) \in \Gamma_a(x) \cap R} \|\nabla F(g,s)\| \quad \text{et} \quad D_{a,k},$$

et pour la fonction d'aire $A_a(x) = A(F,a)(x)$ et de même $A_{a,R}(x)$ et $A_{a,k}(x)$.

On a une analogue du théorème de [1].

THÉORÈME 2.1. *Soit G un ouvert borné de N (contenu dans une boule de Koranyi) et R l'intérieur du complémentaire de $\bigcup_{x \notin G} \Gamma_a(x)$. Soit $\alpha > 1$ et $\delta > 1$ alors*

$$\beta(x \mid A_{a,R}(x) > \lambda) \leqslant C\beta(x \mid CN_{a,R}(x) > \lambda) + C\beta(x \mid CD_{a,R}(x) > \lambda)$$

pour tout λ vérifiant

$$\beta(x \mid A_{a,R}(x) > \lambda) < \alpha\beta(x \mid A_{a,R}(x) > \delta\lambda),$$

où C ne dépend que de α, δ, n et a.

3. *Démonstration du théor̀me* 1.2 *à partir du théorème* 2.1.

Il nous faut pouvoir passer des inégalités intégrales pour cela on rappelle le lemme 3 de [1]:

LEMMA 3.1. *Soient φ et ϕ comme au théorème* 2.1 *avec la condition de croissance $\varphi(\delta\lambda) \leqslant \gamma\varphi(\lambda)$. Soit β la mesure euclidienne de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $h: \mathbb{R}^{2n-1} \to [0, +\infty]$ mesurable à support compact et supposons que $\alpha > 1$, $\delta > 1$ et $0 < \gamma < \alpha/\delta$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(h(x))\, d\beta(x) \leqslant \frac{\alpha\,\delta\gamma}{\alpha - \delta\gamma} \int_{\Lambda} \varphi(\lambda)\, \beta(x \mid h(x) > \lambda)\, d\lambda,$$

où

$$\Lambda = \{\lambda > 0 \mid \beta(x \mid h(x) > \lambda) < \alpha \cdot \beta(x \mid h(x) > \delta\lambda)\}.$$

Pour démontrer le théorème 1.2 on applique le lemme 3.1 avec $h = A_{a,R}$ · ($h \geqslant 0$, h est à support compact puisque si $x \notin G$ $A^2_{a,R}(x) = 0$) $\delta = 2$, $\gamma = C_1$ (C_1 constante de $\varphi(2\lambda) \leqslant C_1\varphi(\lambda)$) et $\alpha = 4\gamma$; $\alpha\,\delta\gamma/(\alpha - \delta\gamma) = 4\gamma = \alpha$ ce qui donne

$$I_{a,A,R} = \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(A_{a,R}(x))\, d\beta(x) \leqslant \alpha \int_{\Lambda} \varphi(\lambda)\, \beta(x \mid A_{a,R}(x) > \lambda)\, d\lambda$$

avec $\Lambda = \{\lambda \mid \beta(x \mid A_{a,R}(x) > \lambda) < \alpha\beta(x \mid A_{a,R}(x) > 2\lambda)$ et par le théorème 2.1

$$I_{a,A,R} \leqslant \alpha C \left[\int_{\Lambda} \beta(x \mid CN_{a,R}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \right.$$
$$\left. + \int_{\Lambda} \beta(x \mid D_{a,R}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \right].$$

Maintenant

$$\int_{\Lambda} \beta(x)\, CN_{a,R}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_0^{+\infty} \beta(x \mid CN_{a,R}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

G est contenu dans une boule de Koranyi de rayon ρ d'où pour $(g, s) \in R$ $s < \rho/a$ (voir la preuve du lemme III.1.1 de [5]). Soit $k > \rho/a$ (par exemple, $k = 2\rho/a$) on a $N_{aR}(x) \leqslant N_{ak}(x)$, d'où

$$\int_{\Lambda} \beta(x \mid CN_{aR}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_0^{+\infty} \beta(x \mid CN_{a,k}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

D'un autre côté on déduit du lemme 5.1 duchapitre III de [5] ou du lemme 6.2 de [26].

LEMME 3.2. *Soit F harmonique dans D, soit $0 < a < b$ et $l < k$. Alors il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant seulement de $(a, b$, et $k/l)$ telle que pour tout $x \in N$*

$$D_{a,l}(x) \leqslant C_2 N_{b,k}(x),$$

d'où pour $x \in G$

$$D_{a,R}(x) \leqslant D_{a,\rho/a}(x) \leqslant C_2 N_{b,k}(x)$$

(C_2 ne dépend ici que de a et b), d'où

$$\int_\Lambda \beta(x \mid CD_{a,R}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \leqslant C_2 \int_0^{+\infty} \beta(x \mid N_{b,k}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Mais d'après le lemme 2.1 du chapitre III de [5] on a

$$\beta(x \mid N_{b,k}(x) > \lambda) \leqslant C_3 \beta(x \mid N_{a,k}(x) > \lambda),$$

où C_3 ne dépend que de a, b et n. on a alors

$$\begin{aligned} I_{a \cdot A \cdot R} &\leqslant \alpha C(1 + C_2 C_3) \int_0^{+\infty} \beta(x \mid CN_{a,k}(x) > \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \\ &\leqslant C' \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(CN_{ak}(x))\, d\beta(x) \\ &\leqslant C' \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(CN_a(x))\, d\beta(x). \end{aligned}$$

Comme $\phi(C\lambda) \leqslant C_1 \phi(\lambda)$ en posant $C' = \alpha C C_1(1 + C_2 C_3)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(A_{a,R}(x))\, d\beta(x) \leqslant C' \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} \phi(N_a(x))\, d\beta(x).$$

On conclut alors par convergence monotone pour $R \nearrow D$.

4. *Démonstration du théorème* 2.1

Nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 4.1. *Soit G un ouvert borné de N et F son complément. Soient $\alpha > 1$ et E une partie mesurable de G vérifiant $\beta(G) \leqslant \alpha\beta(E)$. Alors il existe une boule de Koranyi $B \subset G$ avec au moins un point frontière dans F telle que*

$$\beta(B) \leqslant C\alpha\beta(E \cap B),$$

où C est une constante dépendant seulement de n.

Ce lemme dépend d'un lemme de recouvrement du type Vitali–Wiener du à Coifman et Weiss dans le cadre des espaces de type homogène [2, 3] ou à Knapp [18] dans le cas des espaces symétriques de rang 1. Voir aussi dans notre cadre [7, 21].

Le groupe d'Heisenberg N muni de sa mesure invariante β et de la quasi métrique invariante à gauche définie par $d(g,h)=|h^{-1}\cdot g|$, où $|\cdot|$ est une jauge sur $N\approx\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}$ (on prend, par exemple, avec $g=(u,\tilde{z})$ la jauge $|g|_1=\operatorname{Max}(|u|,\|\tilde{z}\|)$ ou pour avoir une jauge régulière $|g|_2=(u^2+\|\tilde{z}\|^4)^{1/2}$) est alors un espace homogène de paramètres $k=2$ et $A=2^n$ dans les notations de [3] car

$$d(g,h)\leqslant 2(d(g,k)+d(k,h))$$

et si $B_r(g)=\{h\in N: d(g,h)<r\}=g\cdot B_r(0)$ est la boule de Koranyi pour la jauge on a

$$\beta(B_r(g))=C_n r^n, \qquad \text{d'où} \quad \beta(\beta_r(g))=2^n\beta(B_{r/2}(g)).$$

On rappelle donc le théorème 3.1 de [3] dans notre situation.

THÉORÈME 4.2. *Soit G un ensemble borné de N tel que pour chaque $x\in G$ il existe $r(x)$ telque $B_r(x)\subset G$ (ainsi $\{B_r(x), x\in G\}$ est un recouvrement de G). Alors il existe une suite de points $x_j\in G$ telle que $\{B_{r(x_j)}(x_j); x_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une famille de boules disjointes tandis que $\{B_{8r(x_j)}, x_j\}_{j=1}^{\infty}$ est un recouvrement de G.*

Démonstration du lemme 4.1. G étant ouvert et les boules de Koranyi formant une base de voisinages d'un point, pour tout $x\in G$ il existe $r(x)$ tel que $B_{r(x)}(x)\subset G$. On a donc un recouvrement de G et l'on considère la suite de boules du théorème 4.2 en notant $r(x_j)=r_j$, $B_{r(x_j)}(x_j)=B_j$. On a donc

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j)\leqslant\beta(G)\leqslant 8^n\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j)$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j\cap E)\leqslant\beta(E)<8^n\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j\cap E).$$

Compte tenu du fait que $\beta(G)\leqslant\alpha\beta(E)$ on a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j)\leqslant\beta(G)\leqslant\alpha\beta(E)\leqslant\alpha\, 8^n\sum_{j=1}^{\infty}\beta(B_j\cap E).$$

Par conséquent il existe j tel que

$$\beta(B_j) \leqslant \alpha\, 8^n \beta(B_j \cap E)$$

on a

$$B_{r_j}(x_j) \subset G \qquad \text{et} \qquad B_{8r_j}(x_j) \cap F \neq \varnothing$$

soit

$$\rho = \sup\{r \mid r \geqslant r_j,\, B_r(x_j) \subset G\},$$

G étant ouvert on a $B_\rho(x_j) \cap \mathring{F} = \varnothing$ et $B_\rho(x_j) \cap \partial G \neq \varnothing$ par construction; de plus $r_j \leqslant \rho < 8r_j$.

$$\begin{aligned}\beta(B_j) &\leqslant \beta(B_\rho(x_j)) < \beta(B_{8r_j}(x_j)) \leqslant \beta(B_{8r_j}(x_j))\\ &\leqslant 8^n \beta(B_j) \leqslant \alpha\, 8^{2n} \beta(B_j \cap E),\end{aligned}$$

d'où $B = B_\rho(x_j)$ et $C = 8^{2n}$.

Remarque. Comme $\rho < 8r_j$ et qu'on part d'un recouvrement de G pour lequel on peut supposer $r_j < 1$ on aura $\rho < 8$.

On peut maintenant démontrer le théorème 2.1.

Supposons que $\lambda \in \Lambda$ et pour $\varepsilon > 0$ on définit $R_\varepsilon = \{(g, s) \in R \mid s > \varepsilon\}$.

On ne notera pas, pour simplifier les notations, l'indexation par l'ouverture a du domaine admissible sauf s'il y a un risque de confusion.

Puisque $A_{R_\varepsilon} \to A_R$ en croissant pour $\varepsilon \searrow 0$, l'inégalité $\beta(x|A_{R_\varepsilon}(x) > \lambda) < \alpha\beta(x|A_{R_\varepsilon}(x) > \delta\lambda)$ est encore vraie pour ε assez petit, il suffit de prouver l'inégalité avec ε assez petit à savoir

$$\beta(x|A_{R_\varepsilon}(x) > \lambda) \leqslant C\beta(x|N_{R_\varepsilon}(x) > \lambda) + C\beta(x|D_{R_\varepsilon}(x) > \lambda),$$

comme $A_{R_\varepsilon}(x)$ est une fonction continue on a $\{x|A_{R_\varepsilon}(x) > \lambda\} = G_0$ qui est ouvert; de plus $A_{R_\varepsilon}(x) = 0$ si $x \notin G$, d'où $G_0 \subset G$.

Posons

$$\begin{aligned}E = A \cap B \cap C = \{x|A_{R_\varepsilon}(x) > \delta\lambda\} &\cap \{x|N_{R_\varepsilon}(x) \leqslant \gamma\lambda\}\\ &\cap \{x|D_{R_\varepsilon}(x) \leqslant \eta\lambda\},\end{aligned}$$

où γ et η sont à choisir plus tard. On a $E \subset G_0 \subset G$ et $\beta(G_0) \leqslant \alpha\beta(A)$ $\beta(G_0) \leqslant \alpha\beta(E) + \alpha\beta(x|N_{R_\varepsilon}(x) > \gamma\lambda) + \alpha\beta(x|D_{R_\varepsilon}(x) > \eta\lambda)$.

La clef de la preuve est de montrer que

(i) $\alpha\beta(E) \leqslant \frac{1}{2}\beta(G_0)$, pourvu que γ et η soient bien choisis et dépendent seulement de α, δ, a et n. Si (i) est vraie on aura trivialement

$$\beta(G_0) \leqslant 2\alpha\beta(x \mid N_{R_\varepsilon}(x) > \gamma\lambda) + 2\alpha\beta(x \mid D_{R_\varepsilon}(x) > \eta\lambda).$$

Démonstration de (i). Si (i) est fausse alors $\beta(G_0) < 2\alpha\beta(E)$ et par le lemme 4.1 il existe une boule de Koranyi $B \subset G_0$ avec au moins un point frontière hors de G_0 telle que $\beta(B) \leqslant \alpha_0 \beta(E \cap B)$ où $\alpha_0 = 2\alpha\, 8^n$. Par action du groupe N on peut supposer que $B = B_\rho(0)$.

Soit V l'intérieur du complémentaire de $\bigcup_{x \notin B} \Gamma_a(x)$ et $V_\varepsilon = \{(g, s) \in V$ $s > \varepsilon\}$, comme $B \subset G$ on a $\bar{V}_\varepsilon \subset R$. On choisit alors τ tel que $0 < \tau < \frac{1}{2}$, $B_0 = B_{(1-2\tau)\rho}(0)$ vérifie $\beta(B_0)/\beta(B) \geqslant 1 - 1/2\alpha_0$ et on compare $\beta(E \cap B)$ à $\beta(E \cap B_0)$.

On pose $E_0 = E \cap B_0$ et l'on a

$$\begin{aligned}\beta(B) &\leqslant \alpha_0 \beta(E_0) + \alpha_0 \beta(B) - \alpha_0 \beta(B_0)\\ &\leqslant \alpha_0 \beta(E_0) + \alpha_0 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2\alpha_0}\right)\right) \beta(B),\end{aligned}$$

soit $\beta(B) \leqslant 2\alpha_0 \beta(E_0)$.

Maintenant posons $W = \bigcup_{x \in E_0} \Gamma_a(x) \cap V_\varepsilon$ et l'on remarque que $W \subset V_2$ mais aussi que si $x \in E_0$ et $(g, s) \in \Gamma_a(x) \cap R$ on a $|F(g, s)| \leqslant \gamma\lambda$ et $\| \nabla F(g, s) \| \leqslant \eta\lambda$ et qu'en particulier ceci est vrai pour $(g, s) \in \bar{W}$.

Considérons maintenant l'intégrale d'aire relative au domaine W. On va montrer le point suivant:

(ii) On peut choisir η dépendant seulement de a, α, δ et n tel que $\forall x \in E_0$, $A_W^2(x) \geqslant \frac{1}{2}(\delta^2 - 1)\lambda^2$.

Pour cela on découpe en morceaux le domaine admissible $\Gamma_a(x) \cap R_\varepsilon$ pour $x \in E_0$. D'après le lemme 4.1 $B_\rho(0)$ a au moins un point frontière x_0 hors de G_0, on remarque aussi que pour tout (g, s) de W on a $s \leqslant \rho/a$ et $(0, \rho/a) \in \partial\bar{W}$ (lemme III.3.1 de [5]).

$$U_1 = \left\{(g, s) \in \Gamma_a(x_0) \cap R_\varepsilon, |g| < as - \rho, s > \frac{\rho}{a}\right\},$$

$$U_2 = \left\{(g, s) \in \Gamma_a^c(x_0) \cap R_\varepsilon \cap \Gamma_a(x), |g| < as - \rho, s > \frac{\rho}{a}\right\},$$

$$U_3 = \left\{(g, s) \in \Gamma_a(x) \cap R_\varepsilon, |g| \geqslant as - \rho, s > \frac{\rho}{a}\right\},$$

$$U_4 = \left\{(g, s) \in \Gamma_a(x) \cap R_\varepsilon, (g, s) \notin W, s \leqslant \frac{\rho}{a}\right\},$$

$x \in E_0 \subset E$ donc $\delta^2\lambda^2 \leqslant A^2_{R_\epsilon}(x)$ et par le découpage précédent

$$\delta^2\lambda^2 \leqslant A^2_{R_\epsilon}(x) \leqslant A^2_W(x) + A^2_{U_1}(x) + A^2_{U_2}(x) + A^2_{U_3}(x) + A^2_{U_4}(x).$$

On a immédiatement puisque $x_0 \notin G_0$, $A^2_{U_1}(x) \leqslant A^2_{R_\epsilon}(x_0) \leqslant \lambda^2$.

Estimée de $A^2_{U_3}(x)$

$$A^2_{U_3}(x) = \frac{1}{4}\int_{\Gamma_a(x)} \|\nabla F(g,s)\|^2 \frac{d\beta(g)\,ds}{s^{n+1}}$$

(on a vu dans [5] que l'élément de volume $d\omega(g,s)$ valait $d\beta(g)\,ds/4s^{n+1}$). Mais $x \in E$, d'où pour $(g,s) \in \Gamma_a(x) \cap R_\epsilon$ $\|\nabla F(g,s)\| \leqslant \eta\lambda$, d'où

$$A^2_{U_3}(x) \leqslant \frac{\eta^2\lambda^2}{4}\int_{\rho/a}^{+\infty}\frac{ds}{s^{n+1}}\int_{\{g|\,|g|>as-\rho\}\cap\{g|\,|g\cdot x^{-1}|<as\}} d\beta(g).$$

Remarquons que n'ayant qu'une quasi-distance on n'a pas $B_{as-\rho}(0) \subset B_{as}(x)$ bien que $d(x,0) < (1-2\tau)\rho$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{B_{as}(x)\cap\{|g|>as-\rho\}} d\beta(g) \\ &= \int_{B_{as}(x)} d\beta(g) - \int_{B_{as-\rho}(0)} d\beta(g) + \int_{B_{as-\rho}(0)\cap\{|gx^{-1}|>as\}} d\beta(g) \\ &= C_n((as)^n - (as-\rho)^n) + \varphi(s) \end{aligned}$$

$$\int_{\rho/a}^{+\infty} [(a)^n - (a-\rho)^n]\frac{ds}{s^{n+1}} \leqslant C(n,\rho,a)\int_{\rho/a}^{+\infty}\frac{\rho\,ds}{s^2}$$

$C(n,\rho,a)$ ne dépend que de n, ρ et a.

Comme $\rho < 8$ on a

$$\int_{\rho/a}^{+\infty}[(as)^n - (as-\rho)^n]\frac{ds}{s^{n+1}} \leqslant C(n,a).$$

On pose $g = (u,z)$ $u \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ $\|z\|^2 = \sum |z_k|^2$ et, par exemple, la jauge $|g|_1$ et $x \in E_0$, $x = (U_0, C)$ $C_k = C^1_k + iC^2_k$

$$\varphi(s) = \int_{\substack{\{|u|<as-\rho\},\{\|z\|^2<as-\rho\}\\ \{|u-U_0+2\sum y_kC^1_k - x_kC^2_k|>as\},\\ \{\sum((x_k-C^1_k)^2+(y_k-C^2_k)^2)>as\}}} du\,dx_1\cdots dx_{n-1}\,dy_1\cdots dy_{n-1}$$

notant respectivement par $B_e(0, (as-\rho)^{1/2})$, $B_e(C, (as)^{1/2})$ la boule euclidienne $2n-2$ dimensionnelle de centre 0 et rayon $(as-\rho)^{1/2}$, de centre C et rayon $(as)^{1/2}$ on a

$$\varphi(s) \leqslant 2(as-\rho) \int_{B_e(0,(as-\rho)^{1/2}) \cap B_e^c(C,(as)^{1/2})} dx_1 \cdots dx_{n-1} dy_1 \cdots dy_{n-1}$$

$$\leqslant 2s^{n-1}(as-\rho) \int_{B_e(0,(a-\rho/2)^{1/2}) \cap B_e^c(C/s^{1/2},a^{1/2})} dx_1 \cdots dx_{n-1} dy_1 \cdots dy_{n-1}$$

avec le classement

$$-\left(a-\frac{\rho}{s}\right)^{1/2} < \frac{\|C\|}{s^{1/2}} - a^{1/2} < 0 < \frac{\|C\|}{s^{1/2}} < \left(a-\frac{\rho}{s}\right)^{1/2} < \frac{\|C\|}{s^{1/2}} + a^{1/2}.$$

Soit C_{2n-2} l'aire de la boule unité euclidienne de dimension $2n-2$, alors

$$\int_{B_e(0,(a-\rho/s)^{1/2}) \cap B_e^c(C/s^{1/2},a^{1/2})} dx_1 \cdots dx_{n-1}\, dy_1 \cdots dy_{n-1} < \frac{\|C\|}{s^{1/2}} C_{2n-2} a^{n-1}$$

$x \in E_0$ donc $\|C\| < (1-2\tau)\rho$, d'où l'estimée uniforme

$$\varphi(s) \leqslant C(n,a)\, \rho^{1/2}\, s^{n-1/2}$$

et

$$\int_{\rho/a}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}}\, ds \leqslant C(n,a)\, \rho^{1/2} \int_{\rho/a}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \leqslant C'(n,a),$$

d'où $A_{U_3}^2(x) \leqslant C_3(n,a)\, \eta^2\lambda^2$.

Estimée de $A_{U_2}^2(x)$. Pour $(g,s) \in U_2$ on a encore $\|VF(g,s)\| \leqslant \eta\lambda$, d'où

$$A_{U_2}^2(x) \leqslant \frac{\eta^2\lambda^2}{4} \int_{\Gamma_a^c(x_0) \cap R_\epsilon \cap \Gamma_a(x) \cap \{|g| < as-\rho,\, s > \rho/a\}} \frac{d\beta(g)\, ds}{s^{n+1}}$$

$$A_{U_2}^2(x) \leqslant \frac{\eta^2\lambda^2}{4} \int_{\rho/a}^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} \times \int_{\{g \mid |g \cdot x_0^{-1}| > as\} \cap \{g \mid |g| < as-\rho\}} d\beta(g)$$

Puis

$$\int_{\{g \mid |g\cdot x_0^{-1}|>as\}\cap\{g \mid |g|<as-\rho\}} d\beta(g)$$

s'estime encore comme $\varphi(s)$ de I_3 en notant que $|x_0|=\rho$, d'où

$$A_{U_2}^2(x) \leqslant C_2(n,a)\,\eta^2\lambda^2.$$

Estimée de $A_{U_4}^2(x)$. Il nous faut tout d'abord une minoration de s pour $(g,s)\in U_4$. On utilisera ici la jauge régulière $|\ |_2$ et on pose $j=|\ |_2^{1/2}$. D'après un résultat de Cygan [4] on a $j(g_1,g_2)\leqslant j(g_1)+j(g_2)$ de sorte que si l'on pose $d_1(g_1,g_2)=j(g_1^{-1}\cdot g_2)$ on a une vraie distance invariante à gauche par N. Si $(g,s)\in U_4$ alors $d_1(g,x)<(as)^{1/2}$ avec $x\in E_0$ donc $d_1(x,0)<((1-2\tau)\rho)^{1/2}$; $(g,s)\notin V$ donc il existe $y\in N$ avec $d_1(g,0)\geqslant\rho^{1/2}$ et $d_1(g,y)<(as)^{1/2}$.

Comme il est immédiat que $\rho^{1/2}(1-(1-2\tau)^{1/2})\leqslant d_1(x,y)\leqslant 2(as)^{1/2}$ on a $s\geqslant(\tau^2/2)\cdot(\rho/a)$, d'où la majoration de $A_{U_4}^2(x)$.

$$A_{U_4}^2(x)\leqslant \eta^2\frac{\lambda^2}{4}\int_{(\eta^2/2)\cdot(\rho/a)}\frac{ds}{s^{n+1}}\int_{\{|g\cdot x^{-1}|<as\}} d\beta(g)$$

$|g\cdot x^{-1}|\leqslant as$, d'où $|g|<2(as+|x|)<2(as+\rho)$

$$\begin{aligned}A_{U_4}^2(x) &\leqslant C_{n-1}\,2^{n-3}\eta^2\lambda^2\int_{(\eta^2/2)\cdot(\rho/a)}^{\rho/a}\frac{(as+\rho)^{n-1}}{s^{n+1}}\,ds\\ &\leqslant C_4(n,a)\,\eta^2\lambda^2.\end{aligned}$$

Finalement

$$A_W^2(x)\geqslant\lambda^2(\delta^2-(1+\eta^2(C_2(n\cdot a)+C_3(n\cdot a)+C_4(n\cdot a))).$$

On peut donc choisir η dépendant seulement de a, δ et n tel que $A_W^2(x)\geqslant(\delta^2-1)/2\,\lambda^2$ pour tout $x\in E_0$.

On reprend maintenant la démonstration de (i). On a par (ii)

$$\begin{aligned}(\delta^2-1)\,\lambda^2\beta(E_0) &\leqslant 2\int_{E_0} A_W^2(x)\,d\beta(x)\\ &= 2\int_{E_0} dx\int_{\Gamma_a(x)\cap W}\|\nabla F(g,s)\|^2\,d\omega(g,s)\\ &\leqslant 2C_n\int_W s^n\,\|\nabla F(g,s)\|^2\,d\omega(g,s)\end{aligned}$$

et tenant compte du fait que $\Delta F^2 = 2\,\|\nabla F\|^2$

$$(\delta^2 - 1)\,\lambda^2 \leqslant 2C_n \int_W s^n\,\Delta F^2(g, s)\,s\omega(g, s).$$

On va maintenant appliquer le théorème de Green à la région W. On remarque que la frontière supérieure de W est une partie du "cône de base B" d'ouverture a.

En d'autres termes c'est une partie de l'enveloppe $\mathscr{S}$ des hypersurfaces $\mathscr{S}_x$ d'équation $\{(g, s) \mid |g \cdot x^{-1}| = as\}$ où x parcourt ∂B. En prenant la jauge régulière il est alors immédiat que $\mathscr{S}$ est Lipschitzienne. La frontière latérale inférieure L est une partie de l'enveloppe des $\mathscr{S}_x$ ou x parcourt ∂E_0. L n'est pas forcément Lipschitzienned mais on peut approximer E_0 par E_0^k avec $\lim_{k\to\infty} E_0^k = E_0$ de telle sorte que E_0^k soit Lipschitzienne (Voir [17, 26, 27]). Quant à la frontière inférieure $\mathscr{S}_\varepsilon$ elle est contenue dans l'horosphère Λ_ε.

On remarque que $\Delta s^n = 0$ et notant par $\partial/\partial\mathbf{u}$ la dérivée normale extérieure à ∂W pour la métrique considérée, $d\sigma$ la mesure de surface sur ∂W induite par la métrique il vient

$$\int_W s^n\,\Delta F^2(g, s)\,d\omega(g, s)$$
$$= \int_{\partial W} s^n \frac{\partial F^2}{\partial\mathbf{n}}(g, s)\,d\sigma - n\int_{\partial W} F^2(g, s)\,s^{n-1}\frac{\partial s}{\partial n}\cdot d\sigma$$

comme $|\partial F/\partial\mathbf{n}| < \|\nabla F\|$ et dans $\bar{W}$: $\|F(g, s)\| \leqslant \gamma\lambda$, $\|\nabla F(g, s)\| \leqslant \eta\lambda$ il vient

$$(\delta^2 - 1)\,\beta(E_0) \leqslant 2C_n\left(2\eta\gamma\int_{\partial W} s^n\,d\sigma + n\gamma^2\int_{\partial W} s^{n-1}\,|\partial s/\partial\mathbf{n}|\,d\sigma\right).$$

Comme on connait une base orthonormée des champs invariants à gauche par action de N et S avec pour premier champ $s(\partial/\partial s)$ on a $|\partial s/\partial\mathbf{n}| \leqslant s$ et

$$(\delta^2 - 1)\,\beta(E_0) \leqslant 2C_n(2\eta\gamma + n\gamma^2)\int_{\partial W} s^n\,d\sigma.$$

Il ne reste donc qu'à estimer $\int_{\partial W} s^n\,d\sigma$. Sur $\mathscr{S}_\varepsilon$ qui est contenu dans Λ_ε on a $d\sigma = d\beta/2\varepsilon^n$, d'où évident $\int_{\delta_\varepsilon} s^n\,d\sigma \leqslant \beta(E_0) \leqslant \beta(B)$.

Maintenant comme $\mathscr{S}$ et L sont des enveloppes d'hypersurfaces qui sont des bords de domaines admissibles il nous suffit d'avoir une majoration uniforme de l'élément d'aire sur le bord d'un domaine admissible. On utilisera encore à cet effet la jauge régulière.

Lemme 4.3. *Soit $x \in N$ et l'hypersurface $\mathscr{S}_x$ définie par $\{(g, s \in D \mid |g \cdot x^{-1}|_2 = as\}$ alors l'élément d'aire (en coordonnées dans N) $d\sigma(g)$ sur l'hypersurface $\mathscr{S}_x$ est majoré par $C(n, a)(d\beta(g)/s^n)$. $C(n, a)$ ne dépend que de n et a.*

Demonstration. Par action isométrique de N on peut supposer que $x = 0$ et utiliser le domaine admissible canonique $\Gamma_a(0)$. En coordonnées (g, s) avec $g = (u, \tilde{z})$, $u \in \mathbb{R}$, $\tilde{z} = (z_2, \ldots, z_n)$ la matrice de la métrique est alors dans les coordonnées $(s, u, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ dans cet ordre.

$$4s^2 g_{11} = 1, \qquad 4s^2 g_{1,k} = 0, \qquad 2 \leqslant k \leqslant 2n, \qquad 4s^2 g_{22} = 1,$$
$$4s^2 g_{2,2k-1} = -2g_k, \qquad 4s^2 g_{2,2k} = 2x_k, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n,$$
$$s^2 g_{2k,2k} = (x_k^2 + s), \qquad s^2 g_{2k-1,2k-1} = (y_k^2 + s), \qquad 2 \leqslant k \leqslant n,$$
$$s^2 g_{2k,2p} = s_k x_p, \qquad s^2 g_{2k,2p-1} = -x_k y_p, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n, \qquad 2 \leqslant p \leqslant n, \qquad k \neq p,$$
$$s^2 g_{2k-1,2p-1} = y_k y_p,$$

et pour valeur du dS^2

$$\frac{1}{4s^2} dS^2 = ds^2 + du^2 + 4 \sum_2^n (y_k^2 + s^2)\, dx_k^2 + 4 \sum_2^n (x_k^2 + s^2)\, dy_k^2$$
$$- 8 \sum_{p \neq k = 2}^{n} y_p x_k \, dx_p \, dy_k + 8 \sum_{p \neq k = 2}^{n} y_k y_p \, dx_k \, dx_p$$
$$+ 8 \sum_{p \neq k = 2}^{n} x_k x_p \, dy_k \, dy_p.$$

On pose $s = \varphi(u, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n)$ ce qui nous donne pour matrice de la métrique induite sur l'hypersurface $s = \varphi(g)$ en coordonnées $(u, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ dans cet ordre

$$4s^2 g_{11} = 1 + \varphi_u'^2, \qquad 4s^2 g_{1,2k} = -2y_{k+1} + \varphi_u' \varphi_{x_{k+1}}',$$
$$4s^2 g_{1,2k+1} = 2x_{k+1} + \varphi_u' \varphi_{y_{k+1}}', \qquad 4s^2 g_{2k,2k} = 4(y_{k+1}^2 + s) + \varphi'^2_{x_{k+1}},$$
$$s^2 g_{2k+1,2k+1} = 4(x_{k+1}^2 + s) + \varphi'^2_{y_{k+1}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$4s^2 g_{2k,2p+1} = -4x_{k+1} y_{p+1} + \varphi_{x_{p+1}}' \varphi_{x_{k+1}}', \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1,$$
$$4s^2 g_{2k,2p} = 4y_{k+1} y_{p+1} + \varphi_{x_{k+1}}' \varphi_{x_{p+1}}', \qquad 1 \leqslant k, p \leqslant n-1, \qquad p \neq k,$$
$$4s^2 g_{2k+1,2p+1} = 4x_{k+1} x_{p+1} + \varphi_{y_{k+1}}' \varphi_{y_{p+1}}', \qquad 1 \leqslant k, p \leqslant n-1, \qquad p \neq k.$$

Il nous faut estimer le déterminant de la matrice de la métrique avec $\varphi(u, \tilde{z}) = (1/a)\,(u^2 + \|\tilde{z}\|^4)^{1/2} = (1/a)\,|g|_2$.

Pour cela on va majorer chaque coefficient de la matrice de la métrique. Pour ne pas avoir $1/a$ en facteur partout on supposera que $a = 1$ ce qui ne changera rien au principe de la majoration.

$$\frac{d\varphi}{\partial u} = \frac{u}{|g|_2}, \qquad \frac{d\varphi}{\partial x_k} = \frac{2\,\|\tilde{z}\|^2\, x_k}{|g|_2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} = \frac{2\,\|\tilde{z}\|\; y_k}{|g|},$$

comme

$$|u| \leqslant |g|_2, \qquad |x_k^2| \leqslant |g|_2, \qquad |y_k^2| \leqslant |g|_2,$$

$$|y_k y_p| \leqslant |g|_2, \qquad |x_k x_p| \leqslant |g|_2,$$

on a

$$\varphi_u'^2 \leqslant 1, \qquad |\varphi'_{x_k}\varphi_{y_p}| < 4\,|g|_2,$$

$$|\varphi'_{x_k}\varphi'_{x_p}| < 4\,|g|_2, \qquad |\varphi'_{y_k}\varphi'_{y_p}| \leqslant 4\,|g|_2,$$

posant $a_{ij} = 4s^2 g_{ij}$ on en déduit que $|a_{ij}| \leqslant 12\,|g|_2$ sauf $|a_{11}| \leqslant 2$. On note par D_{kp} le mineur correspondant à a_{kp} et $|D_{kp}|$ son déterminant en valeur absolue, D étant le déterminant de (g_{ij}).

$$|D| \leqslant \frac{1}{(4\,|g|^2)^{2n-1}}\,[2\,|D_{11}| + |a_{12}| \cdot |D_{12}| + \cdots + |a_{1,2n-1}| \cdot |D_{1,2n-1}|],$$

$$|D_{11}| \leqslant (2(n-1))!\; 12^{2n-1}\,|g|_2^{2(n-1)} = C_1(n)\,|g|_2^{2(n-1)}$$

Pour $l \geqslant 2$

$$|a_{1l}| \cdot |D_{1l}| \leqslant (2n-3)!\; 12^{2n-3}\,|a_{1l}| \left(\sum_{k=2}^{n} |a_{k1}|\right) |g|_2^{2n-3}.$$

On vérifie que $|a_{1l}|\,|a_{k1}| \leqslant 16\,|g|_2$ de sorte que $|a_{1l}| \cdot |D_{1l}| \leqslant (2n-2)!$ $16 \cdot 12^{2n-3}\,|g|^{2n-2} = C_2(n)\,|g|^{2n-2}$ et

$$|D| \leqslant \frac{(C_1(n) + (2n-2)\,C_2(n))\,|g|_2^{2n-2}}{4^{2n-1}\,|g|_2^{2(2n-1)}} = (C(n))^2 \times \frac{1}{|g|_2^{2n}},$$

d'où $d\sigma(g) \leqslant C(n, a)(d\beta(g)/s^n)$.

On termine maintenant la preuve de (i). Maintenant $\mathscr{S}$ est définie par $s = \Psi(g)$, où $g \in A_{\mathscr{S}}$ avec $A_{\mathscr{S}} \subset B$ de même L est définie par $s = \chi(g)$ où $g \in A_L \subset B$. $\mathscr{S}$ et L étant enveloppes de domaines admissibles on a par le lemme 4.3 en notant $d\sigma_{\mathscr{S}}(g)$ l'élément d'aire sur $\mathscr{S}$ (de même pour L)

$$\int_{\mathscr{S}} s^n\, d\sigma = \int_{A_{\mathscr{S}}} s^n\, d\sigma_{\mathscr{S}}(g) \leqslant C(n, a)\,\beta(A_{\mathscr{S}}),$$

$$\int_{L} s^n\, d\sigma = \int_{A_L} s^n\, d\sigma_L(g) \leqslant C(n, a)\,\beta(A_L),$$

d'où finalement

$$(\delta^2 - 1)\,\beta(E_0) \leqslant C_n(2\eta\gamma + n\gamma^2)(1 + 2C(n, a))\,\beta(B),$$

mais $\beta(B) \leqslant 2\alpha_0\beta(E_0)$, d'où si γ est suffisamment petit on obtient une contradiction.

III. Comparaison des espaces H^p et H^p_A $(1 < p < +\infty)$

1. *Démonstration de l'inclusion $H^p \subset H^p_A$*

En utilisant le théorème 2 ou le théorème 8.1 de [21] on peut en déduire

Corollaire 1.1. *Soit $f \in L^p(N)$, à valeurs réelles $(1 < p < +\infty)$, et $F = \text{Poisson}[f]$. Alors il existe une constante C ne dépendant que de p et n telle que*

$$\|f\|_p = \|F\|_p \leqslant C\,\|F\|_p^A.$$

Démonstration. On remarque par ([21] lemme 8.4 et page 635) que pour $f \in L^2(N, d\beta)$ $(\|f\|_2)^2 = C_1(\|F\|_2^A)^2$ avec une constante C_1 indépendante de f. Nous allons donc pouvoir polariser l'égalité ci-dessus. Pour cela soit σ^{Ki} la racine positive de la matrice hermitienne g^{ij} du laplacien. On considère l'application linéaire T de $L^2(N)$ sur $T(L^2(N))$ ainsi définie: soit $f \in L^2(N)$

$$T(f) = (T_1 f, T_2 f, \dots, T_n f),$$

où $T_i f$ est une fonction définie dans D par

$$T_i f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ki}(z) \frac{\partial F}{\partial z_k}(z).$$

On définit alors dans $T(L^2(N))$ le produit scalaire hermitien par

$$\langle T(f), T(g)\rangle = \int_N d\beta(x) \int_{\Gamma_a(x)} \sum_{i,k,l=1}^{n} \sigma^{ki}(z) \frac{\partial F}{\partial z_k}(z) \times \overline{\sigma^{li}}(z) \overline{\frac{\partial G}{\partial z_l}}(z)\, d\omega(z),$$

où $G = \text{Poisson}[g]$

$$\langle T(f), T(g)\rangle = \int_N d\beta(x) \int_{\Gamma_a(x)} \sum_{k,l=1}^{n} g^{k\cdot l}(z) \frac{\partial F}{\partial z_k}(z) \overline{\frac{\partial G}{\partial z_l}}(z)\, d\omega(z).$$

ce qui nous donne bien

$$\langle T(f), T(f)\rangle = (\|F\|_2^A)^2.$$

On a bien sur le produit scalaire naturel sur $L^2(N)$:

$$\langle f, g\rangle = \int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x),$$

d'où par polarisation

$$2\langle f, g\rangle = C_1(\langle T(f), T(g)\rangle + \langle T(g), T(f)\rangle).$$

On suppose tout d'abord que $f \in L^2 \cap L^p(N)$ et soit q l'exposant conjugé de p. On a

$$\|f\|_{L^p(N)} = \sup_{g \in L^2 \cap L^q(N)} \left|\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)\right|$$

et

$$\left|\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)\right|$$
$$= C_1 \left|\int_N d\beta(x) \int_{\Gamma_a(x)} \sum_{i,k,l=1}^{n} \sigma^{ki}(z) \frac{\partial F}{\partial z_k}(z)\, \bar{\sigma}^{il}(z) \overline{\frac{\partial G}{\partial z_l}}(z)\, d\omega(z)\right|.$$

Mais à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à l'intégrale sur $\Gamma_a(x)$

$$\left|\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)\right|$$
$$\leqslant C_1 \int_N d\beta(x) \left(\int_{\Gamma_a(x)} \|\nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_a(x)} \|\nabla G(z)\|^2\, d\omega(z)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C_1 \int_N A(F, a)(x) \cdot A(G, a)(x)\, d\beta(x).$$

On a applique maintenant l'inégalité de Hölder ce qui donne

$$\left|\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)\right| \leqslant C_1 \|F\|_p^A \cdot \|G\|_q^A.$$

Appliquant alors le théorème 2 il vient

$$\left|\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)\right| \leqslant C_1 C\, \|F\|_p^A\, \|g\|_q.$$

Soit pour $f \in L^2 \cap L^p(N)$

$$\|f\|_p \leqslant C_1 C\, \|F\|_p^A.$$

On conclut ensuite par densité pour $f \in L^p(N)$.

Pour démontrer l'inclusion $H^p \subset H_A^p$ il reste à voir que dans H^p on a bien la condition de normalisation à l'infini.

LEMME 1.2. *Soit F harmonique dans D telle que pour p, $1 \leqslant p < +\infty$, on ait*

$$C_1 = \sup_{s>0} \int_N |F(g,s)|^p\, d\beta(g) < +\infty,$$

alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup_{g\in N} |f(g,s)| < C/s^{n/p}$.

Démonstration. Soit $B_\rho(g,s)$ la boule géodésique de rayon ρ et de centre (g,s) posant $r = th\rho$ on vérifie que pour $(g', s') \in B_\rho(0,s)$

$$s_1 = s\,\frac{1-r}{1+r} \leqslant s' \leqslant s\,\frac{1+r}{1-r} = s_2$$

et que le maximum est atteint pour $(0, s_2)$ et le minimum pour $(0, s_1)$. On a par le lemme 1.1 p. 328 de [5]

$$|F(g,s)|^p \leqslant \frac{C_\rho}{\omega(B_\rho(g,s))} \int_{B_\rho(g,s)} |F(g',s')|^p\, d\omega(g',s')$$

par action isométrique de N on a

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(g,s)} |F(g',s')|^p\, d\omega(g',s') \\
&\quad = \int_{B_\rho(0,s)} |F(g^{-1}g',s')|^p\, d\omega(g',s') \\
&\quad = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{s'^{n+1}} \int_{\Lambda_{s'}\cap B_\rho(0,s)} |F(g^{-1}\cdot g',s')|^p\, d\beta(g') \\
&\quad \leqslant \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{s'^{n+1}} \int_N |F(g^{-1}\cdot g',s')|^p\, d\beta(g') \\
&\quad \leqslant C_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{s'^{n+1}} = \frac{C_1}{n}\cdot\frac{s_2^n - s_1^n}{s_1^n s_2^n}.
\end{aligned}$$

Maintenant compte tenu des valeurs de s_1 et s_2 et du fait que

$$\omega(B_\rho(g, s)) = \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{r^{2n}}{(1-r^2)^n}$$

on a

$$|F(g, s)|^p \leqslant \frac{C_1}{n} \cdot \frac{n!}{\pi^n} \cdot \frac{(1+r)^{2n} - (1-r)^{2n}}{r^{2n}} \times \frac{1}{s^n} = \frac{C(r)}{s^n}$$

(on verra le calcul du volume des boules géodésiques au cours de l'étude de la fonction de Green).

Remarque. On a un lemme analogue dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ (Lemme 3 de [9], avec le même exposant n. Comme ici nous sommes en dimension réelle $2n$ on aurait pu s'attendre à trouver un exposant $2n$. La différence provient de la distorsion des boules de Koranyi.

COROLLAIRE 1.3. *Soit* $F \in H^p$ $1 \leqslant p < +\infty$ alors $\varphi(s) = \int_N |F(g, s)|^p \, d\beta(g)$ *est une fonction décroissante et* $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 0$.

Démonstration. Soit $0 < s_1 < s_2$, $f_{s_i}(g) = F(g, s_i)$ *est dans* $L_p(N)$. Soit $P_{s_2,s_1}(g)\, d\beta(g)$ la mesure harmonique du point $(0, s_2)$ sur l'horosphère Λ_{s_1}. Alors

$$F(g, s_2) = f_{s_1} * P_{s_2,s_1}(g)$$

et

$$\varphi(s_2) = \|f_{s_2}\|_p \leqslant \|P_{s_2,s_1}\|_1 \cdot \|f_{s_1}\|_p = \|f_{s_1}\|_p = \varphi(s_1).$$

On a $|f_t(g)| \leqslant N(F, a)(g)$ et d'après le théorème 2.3 de [5]

$$(\|F\|_p)^p = \sup_{s>0} \varphi(s) \leqslant C(\|N(F, a)\|_p)^p \leqslant C_1 \|F\|_p,$$

si $p > 1$. Si $p = 1$ $N(F, a)$ est intégrable par définition.

De plus par le lemme 1.2 on a $\lim_{s\to\infty} f_s(g) = 0$ pour tout g de N. On conclut alors par le théorème de convergence dominée deLebesgue.

2. *Démonstration de l'inclusion $H_A^p \subset H^p$*

On va montrer que si $F \in H_A^p$ alors F vérifie l'hypothèse de croissance du théorème 1 on utilisera ensuite une régularisation en convolant avec un noyau C^∞.

LEMME 2.1. *Soit $F \in H^p_A (1 \leqslant p < +\infty)$ et $s_k = 2^{-k}$ et f_k la restriction de F à l'horosphère de niveau k. Alors il existe une constante $Y > 0$ telle que $\|f_k\|_p = (\int_N |G(g, s_k)|^p \, d\beta(g))^{1/2} \leqslant k \ Y \|F\|^A_p$ où Y peut dépendre de f.*

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < Y$. On a

$$|F(g, Y) - F(g, \varepsilon)| \leqslant \operatorname{Log} \frac{Y}{\varepsilon} \sup_{\varepsilon \leqslant s \leqslant Y} \|\nabla F(g, s)\|. \tag{1}$$

Il existe $s_1 \in [\varepsilon, Y]$, où le sup est atteint.

Bien que $\|\nabla F\|^2$ ne soit pas une fonction sousharmonique comme dans le cas euclidien—La courbure de la variété est négative—on aura tout de même une "presque" propriété de sous moyenne. Voir aussi un résultat analogue dans [20].

Pour cela on va utiliser les champs de vecteurs qui commutent avec le Laplaien introduits par Putz dans [26]

$$D_0 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\bar{\partial}}{\partial \bar{z}_1} + \frac{1}{2} \sum_2^n \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}; \qquad D_k = -2i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial}{\partial z_k}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Soit alors $D_1' = D_1 - iD_0$. On a

$$D_1'(0, 1) = 2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad D_k(0, 1) = \frac{\partial}{\partial z_k}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Comme on a

$$g^{ij}(dD_i, d\bar{D}_j) = g^{ij}(0, 1) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad g^{11} = 4, \quad g^{k\bar{k}} = 1, \quad 2 \leqslant k \leqslant n$$

on a $\|\nabla F(0, 1)\|^2 = |D_1' F(0, 1)|^2 + \sum_2^n |D_k F(0, 1)|^2$. F étant harmonique $D_1' F$, $D_k F$, $2 \leqslant k \leqslant n$ sont des fonctions harmoniques et on peut appliquer le lemme 1.1 p. 328 de [5] à ces fonctions sur la boule géodésique $B_\rho(0, 1)$ de rayon ρ. On aura avec une constante C_ρ ne dépendant que de ρ

$$|D_1' F(0, 1)|^2 \leqslant C_\rho \int_{B_\rho(0,1)} |D_1' F(u)|^2 \, d\omega(u)$$

et de même pour les D_k ce qui donne

$$\|\nabla F(0, 1)\|^2 \leqslant C_\rho \int_{B_\rho(0,1)} \left(|D_1' F(u)|^2 + \sum_2^n |D_k F(u)^2 \right) d\omega(u).$$

Mais $\|\nabla F(u)\|^2 = \sum g^{i\bar{j}}(dD_i, \bar{d}D_j)\, D_i F \cdot \overline{D_j F}$ et sur la boule $B_\rho(0, 1)$ l'opérateur est strictement elliptique: il existe donc une constante C'_ρ telle que pour $u \in B_\rho(0, 1)$ on ait

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{i\bar{j}}(dD_i, \overline{dD_j})\, D_i F(u)\, \overline{D_j F}(u) \geqslant C'_\rho \sum_{i=1}^{n} |D_i F(u)|^2.$$

Soit $\|\nabla F(0, 1)\| \leqslant C_\rho \int_{B_{\rho(0,1)}} \|\nabla F(u)\|^2\, d\omega(u)$ avec une autre constante C_ρ ne dépendant que de ρ. Maintenant si $z = (g, s)$ est un point quelconque de D. Comme la multiplication par g ou par s est une isométrie pour la métrique de Bergmann la fonction $D \ni u \to F(g \cdot s \cdot u) = F_1(u)$ est harmonique et de plus $\|\nabla F(z)\|^2 = \|\nabla F_1(0, 1)\|^2$ on a le résultat pour z quelconque dans D.

$$\|\nabla F(z)\|^2 \leqslant C_\rho \int_{B_\rho(z)} \|\nabla F(u)\|^2\, d\omega(u). \tag{2}$$

D'après la proposition 4.3, IV de [5] pour ρ assez petit ne dépendant que de a on aura

$$B_\rho(g, s_1) \subset \Gamma_a(g),$$

d'où avec (1) et (2)

$$|F(g, Y) - F(g, \varepsilon)| \leqslant \operatorname{Log} \frac{Y}{\varepsilon} A(F, a)(g),$$

ce qui nous donne avec $\varepsilon = 2^{-k}$

$$\|f_k\|_p \leqslant k \operatorname{Log} 2Y \|F\|_p^A + \|f_Y\|_p$$

et à cause de l'hypothèse de normalisation à l'infini pour Y assez grand dépendant de F on a le résultat annoncé.

Ce lemme joint au théorème 1 nous donne

COROLLAIRE 2.2. *Soit $F \in H_A^p$, $1 < p < +\infty$, alors F a des valeurs au bord dans W_p^{-1} et vérifie la conclusion du théorème* 1.

Maintenant que nous avons des valeurs au bord dans un espace de Sobolev nous pouvons utiliser une technique de régularisation.

Soit φ_m une approximation de l'identité dans N à support dans la boule de Koranyi $B(0, 1/m)$ de centre 0 et "rayon" $1/m$; et bien sur $\varphi_m C^\infty$. Il n'est pas difficile de construire une telle fonction.

Par exemple on prend $\varphi(g) = \varphi(u, \tilde{z}) = Ce^{(1/(|g|_2^2 - 1))}$, où $|g|_2 = (u^2 + \|\tilde{z}\|^4)^{1/2}$ si $|g|_2 \leqslant 1$ et $\varphi(g) = 0$ si $|g|_2 \geqslant 1$. C est choisi pour que $\int_N \varphi(g)\, d\beta(g) = 1$ puis $\varphi_\varepsilon(g) = \varepsilon^{-n} \varphi(\varepsilon^{-1} u, \varepsilon^{-1/2} \tilde{z})$, où $2n - 1$ est la dimension de N. Pour une fonction F définie dans D la convolution se fait "par niveaux". Soit $z \in D$, $z=(x,s)$ $x \in N$, $s>0$

$$\begin{aligned} F * \varphi_m(z) &= \int_N F(z \cdot g^{-1})\, \varphi_m(g)\, d\beta(g) \\ &= \int_N F(x \cdot g^{-1}, s)\, \varphi_m(g)\, d\beta(g) \\ &= \int_N F(g, s)\, \varphi_m(g^{-1} \cdot x)\, d\beta(g). \end{aligned}$$

On remarque que si F est harmonique dans D, comme le laplacien de Bergmann est un opérateur différentiel invariant à gauche et le champ radial $s(\partial/\partial s)$ n'agit pas sur la convolution, $F * \varphi_m$ est harmonique. On a aussi la décroissance de la fonction d'aire par convolution:

LEMME 2.3. *Soit F de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\|A(F)\|_{L_p(N)} < +\infty$ et φ_m l'approximation de l'identité. Alors*

$$A(F * \varphi_m) \leqslant A(F) * \varphi_m \leqslant (A^2(F) * \varphi_m)^{1/2}$$

et pour $1 < p < +\infty$ $\|A(F * \varphi_m)\|_p \leqslant \|A(F)\|_p$.

Démonstration.

$$T_0 = s\frac{\partial}{\partial s}, \qquad T_1 = sX_0; \qquad T_k = s^{1/2}X_k, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n,$$

$$T_{n+k} = s^{1/2}Y_{k+1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

est une base orthonormée pour la métrique de Bergman de D de champs invariants à gauche par action de $N \cdot S$ [5, p. 316], d'où pour F de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$.

$$\|\nabla F(z)\|^2 = \sum_{k=0}^{2n-1} (T_k F(z))^2$$

et

$$T_k(F * \varphi_m) = (T_k F) * \varphi_m, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1,$$

alors

$$\|\nabla(F * \varphi_m)(z)\|^2 = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\int_N T_k F(z \cdot g^{-1})\, \varphi_m(g)\, d\beta(g)\right)^2.$$

On utilise maintenant une inégalité de convexité avec $p = 2$ et la mesure de probabilité $\varphi_m \, d\beta$ et pour $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ on a

$$\left(\int_N T_k F(z \cdot g^{-1}) \, \varphi_m(g) \, d\beta(g)\right)^2 \leqslant \int_N [T_k F(z \cdot g^{-1})]^2 \, \varphi_m(g) \, dg,$$

d'où pour tout $z \in D$

$$\| V(F * \varphi_m)\|^2 \leqslant \| VF \|^2 * \varphi_m(z)$$

et pour tout $x \in N$

$$A(F * \varphi_m)(x) \leqslant \left(\int_{\Gamma_a(x)} \| VF \|^2 * \varphi_m(z) \, d\omega(z)\right)^{1/2} = A_m(F)(x).$$

On remarque alors que pour $x \in N$

$$(A_m F)^2 \, (x) = A^2(F) * \varphi_m(x)$$

de plus pour $u \in N$

$$A_m(F)(u) = \left(\int_{\Gamma_a(0)} \| VF \|^2 \, \Gamma \varphi_m(u \cdot z, s) \, \frac{d\beta(z) \, ds}{s^{n+1}}\right)^{1/2},$$

$$A_m(F)(u) = \left(\int_N \varphi_m(y) \, d\beta(y) \int_{\Gamma_a(0)} \| VF(u \cdot z \cdot y^{-1}, s)\|^2 \, \frac{d\beta(z) \, ds}{s^{n+1}}\right)^{1/2}.$$

Mais $(\int f \, d\mu)^p \geqslant \int f p \, d\mu$ si $f \geqslant 0$, μ mesure de probabilité et $0 < p < 1$, d'où

$$A_m(F)(u) \geqslant \int_N \varphi_m(y) \, d\beta(y) \left(\int_{\Gamma_a(0)} \| VF(u \cdot z \cdot y^{-1}, s)\|^2 \, \frac{d\beta(z_0) \, ds}{s^{n+1}}\right)^{1/2}$$

soit

$$A_m(F)(u) \geqslant A(F) * \varphi_m(u).$$

Maintenant on remarque que $F \to A(F)$ est sous additive de sorte que

$$A(F * \varphi_m)(x) = A\left(\int_N F(xy^{-1}, s) \, \varphi_m(y) \, d\beta(y)\right)$$

$$\leqslant \int_N \varphi_m(y) \, A(F_y)(x) \, d\beta(y),$$

où $F_y(x, s) = F(xy^{-1}, s)$. Mais

$$A^2(F_y)(x) = \int_{\Gamma_a(0)} \| VF_y(x, z)\|^2 \, d\omega(z)$$

et les translations par des éléments de N sont des isométries pour la métrique de Bergmann, d'où

$$A^2(F_y)(x) = \int_{\Gamma_a(0)} \| VF(x \cdot y^{-1} \cdot z)\|^2 \, d\omega(z) = A^2F(x \cdot y^{-1}),$$

d'où finalement

$$A(F * \varphi_m) \leqslant A(F) * \varphi_m \leqslant A_m(F)$$

comme

$$\|A(F) * \varphi_m\|_p \leqslant \|A(F)\|_p \, \|\varphi_m\|_1 = \|A(F)\|_p.$$

On a le résultat annoncé.

On peut maintenant montrer que si $F \in H_p^A$ alors $F \in H^p$, $1 < p < +\infty$.

Soit $F \in H_p^A$ et $F * \varphi_m$. f étant la valeur au bord, dans W_p^{-1}, de F du corollaire 2.2, $f * \varphi_m$ est alors C^∞. De plus comme $f = f_0 + D_1 f_1$, où f_0 et f_1 sont dans $L_p(N, d\beta)$ et D_1 un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants par rapport aux champs invariants à gauche. Toujours à cause de l'invariance à gauche on a

$$f * \varphi_m = f_0 * \varphi_m + f_1 * D_1 \varphi_m,$$

d'où

$$\|f * \varphi_m\|_{L_p(N)} \leqslant (\|f_0\|_{L_p(N)} + \|f_1\|_{L_p(N)}) \, \|\varphi_m\|_{W_1^1}$$

et $f * \varphi_m \in L_p(N, d\beta)$.

On regarde alors $F * \varphi_m$ pour *m fixé.* $F * \varphi_m$ est harmonique. On va montrer que $F * \varphi_m \in H^p$, ie l'intégrale dans $L_p(N)$ sur les orbites du nilpotent est bornée. f_k étant la restriction de F à A_{s_k} on veut calculer $\|f_k * \varphi_m\|_{L_p(N)}$, où $s_k = 2^{-k}$. Soit $g \in L_q(N, d\beta)$. Un calcul immédiat montre que

$$\langle f_k * \varphi_m, g\rangle = \langle f_k, g_- * \varphi m\rangle, \qquad \text{où} \quad g_-(u) = g(-u),$$

de sorte que

$$|\langle f_k * \varphi_m, g\rangle| \leqslant \|f_k\|_{W_p^{-1}} \, \|g_- * \varphi_m\|_{W_q^1}$$

On a aussi

$$\|g_- * \varphi_m\|_{W_q^1} = \|g_- * \varphi_m\|_{L_q(N)} + \|V_N(g_- * \varphi_m)\|_{L_q(N)},$$
$$\|g_- * \varphi_m\|_{L_q(N)} \leqslant \|g\|_{L_q} \|\varphi_m\|_1 = \|g\|_{L_q}$$

Comme $V_N(g_- * \varphi_m) = g_- * V_N \varphi_m$, par invariance à gauche, on a

$$\|V_N(g_- * \varphi_m)\|_{L_q(N)} \leqslant \| \, |V_N \varphi_m| \, \|_{L_1(N)} \|g\|_{NL_q(N)}$$

et

$$\|g_- * \varphi_m\|_{W_q^1} \leqslant \|g\|_{L_q(N)} \cdot \|\varphi_m\|_{W_1^1},$$
$$|\langle f_k * \varphi_m, g\rangle| \leqslant \|f_k\|_{W_p^{-1}} \|\varphi_m\|_{W_1^1} \|g\|_q.$$

Soit

$$\|f_k * \varphi_m\|_{L_p(N)} \leqslant \|f_k\|_{W_p^{-1}} \|\varphi_m\|_{W_1^1}.$$

Mais on a vu au corollaire du lemme 2.1 que $\|f_k\|_{W_p^{-1}} \leqslant C$ indépendant de k. On va maintenant montrer que $\|f_s * \varphi_m\|_p$ est décroissante de s.

Par le lemme 2.3 $f_k * \varphi_m \in L_p(N)$ soit $s > 2^{-(k+1)}$. On a alors avec les notations de la démonstration du théorème 1

$$f_s * \varphi_m(x) = \int_N P_{s,k+1}(x^{-1} \cdot g) f_{k+1} * \varphi_m(g)\, d\beta(g)$$
$$= (f_{k+1} * \varphi_m) * P_{s,k+1}(x),$$

d'où

$$\|f_s * \varphi_m\|_p \leqslant \|f_{k+1} * \varphi_m\|_p \|P_{s,k+1}\|_1.$$

Mais le noyau de Poisson a pour masse 1 d'où la décroissance.

$F * \varphi_m$ est donc dans H^p on peut donc utiliser le théorème de Koranyi [19]. Il existe $f_m \in L_p(N)$ telle que $F * \varphi_m = \text{Poisson}[f_m]$. (D'ailleurs $f_m = f * \varphi_m$), i.e.,

$$F * \varphi_m(g, s) = f_m * P_s(g)$$

On utilise ensuite le corollaire 1.1 de l'inclusion $H_p \subset H_A^p$ qui nous dit que

$$\|F * \varphi_m\|_p \leqslant C \|F * \varphi_m\|_p^A,$$

où C ne dépend que de a, p et n (a de l'ouverture du domaine admissible, n de la dimension de D).

Maintenant pour tout $z \in D$

$$\lim_{m\to\infty} F * \varphi_m(z) = F(z),$$

d'où sur l'horosphère A_s

$$\lim_{n\to\infty} F * \varphi_m(g,s) = F(g,s)$$

pour tout $g \in N$ et par le lemme de Fatou pour tout $s > 0$

$$\|f_s\|_p \leqslant C\,\|F\|_p^A$$

de sorte que $F \in H_p$ et de plus il existe une constante C indépendante de $F \in H_p^A$ telle que pour toute fonction $F \in H_p^A$ on ait

$$\|f\|_p \leqslant C\,\|f\|_p^A.$$

COROLLAIRE 2.4. *Pour tout* $1 < P < +\infty$ *tous les espaces* H^p, H_N^p, H_*^p, H_S^p *et* H_A^p *coincident.*

Immédiat par les théorèmes de [5] et le théorème 3.

Remarque. Dans la définition de l'intégrale d'aire de Caldéron Lusin on ne s'intéresse qu'aux valeurs du gradient de la fonction avec une condition de normalisation à l'infini. Par contre dans l'intégrale d'aire brownienne il intervient le gradient de la fonction ainsi que les valeurs de la fonction. Mais d'après le théorème 3 pour $1 < p < +\infty$ on pouvait tout aussi bien ne garder que la partie en gradient mais avec la même condition de normalisation à l'infini que dans le cas de H_A^p.

IV. COMPARAISON DES FONCTIONS DE LITTLEWOOD–PALEY ASSOCIÉES À LA FONCTIONS DE GREEN OU À L'INTÉGRALE RADIALE DU GRADIENT AVEC L'INTÉGRALE D'AIRE DE CALDÉRON LUSIN

1. *Preliminaires*

Nous allons considérer un minorant (pour $p \geqslant 2$) de l'intégrale d'aire brownienne qui sera en fait une fonction de Littlewood–Paley. Nous comparerons directement la norme dans H_A^p de l'intégrale d'aire de Caldéron Lusin à une norme associée à cette fonction de Littlewood–Paley. Le point essentiel de cette étude étant une estimée cruciale de l'intégrale de la fonction de Green sur les horosphères. Ceci nous permet aussi d'identifier pour $p = 2$ toutes les normes des fonctions d'aire considérées. Une comparaison ponctuelle des intégrales d'aire radiale et de Caldéron Lusin nous permet alors d'obtenir un raffinement du théorème 3.

On rappelle que (voir [5]) $X_\omega(t)$ étant la diffusion sur D de générateur $1/2\Delta$ et F une fonction harmonique dans D.

$$SF(\omega)=\left(F^2(X_\omega(0))+\int_0^{+\infty}\|\nabla F(X_\omega(t))\|^2\,dt\right)^{1/2}$$

et

$$\|F\|_p^S=\sup_{s>0}\,(E^{\beta_s}(SF(\omega))^p)^{1/p},$$

où E^{β_s} est l'espérance de mesure initiale β sur l'horosphère Λ_s, $E_{(x,s)}$ étant celle de la diffusion partant de $(x,s)\in D$.

On a pour $x\in N$ et $s>0$

$$\begin{aligned}E_{(x,s)}(SF(\omega))^p&=E_{(x,s)}\left(F^2(x,s)+\int_0^{+\infty}\|\nabla F(X_\omega(t))\|^2\,dt\right)^{p/2}\\&\geqslant E_{(x,s)}\left(\int_0^{+\infty}\|\nabla F(X_\omega(t)\|^2\,dt\right)^{p/2}.\end{aligned}$$

En appliquant une inégalité de convexité on obtient donc dans notre situation pour $p\geqslant 2$

$$E_{(x,s)}(SF(\omega))^p\geqslant\left(E_{(x,s)}\left(\int_0^{+\infty}\|\nabla F(X_\omega(t))\|^2\,dt\right)\right)^{p/2}.$$

En interprétant, comme il est fait classiquement, une intégrale de la fonction de Green comme une espérance d'un tempts de séjour dans la partie considérée (ici il s'agit du tempts de séjour dans D) on aura en notant par $G(z,z')$ (avec $z\in D$, $z'\in D$ la fonction de Green de D muni de la métrique de Bergman

$$E_{(x,s)}\left(\int_0^{+\infty}\|\nabla F(X_\omega(t)\|^2\,dt\right)=\int_D G((x,s),z)\,\|\nabla F(z)\|^2\,d\omega(z).$$

La fonction de Littlewood–Paley que nous aurons à considérer est alors

$$G(F)(x,s)=\left(\int_D G((x,s),z)\,\|\nabla F(z)\|^2\,d\omega(z)\right)^{1/2}$$

avec pour norme

$$\|G(F)\|_p=\sup_{s>0}\left(\int_N (G(F)(x,s))^p\,d\beta(x)\right)^{1/p}$$

et l'on sait déjà que pour $p \geqslant 2$ $\|G(F)\|_p \leqslant \|F\|_p^S \leqslant C\,\|F\|_p$ (théorème 1 et proposition 3.6 de [5]). Mais voulant effectuer une comparaison directe de $G(F)$ avec la fonction d'aire de Calderon Lusin il nous sera utile de calculer la fonction de Green de D.

2. *Calcul de la fonction de Green de l'espace hermitien hyperbolique*

LEMME 2.1. *La fonction de Green de D muni de la métrique*—$\partial\bar\partial$ Log h *est pour* $(U, Z) \in D \times D$

$$G(U,Z) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{4\cdot\pi^n}\left(\operatorname{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)$$

où

$$x = \frac{4h(U)\,h(Z)}{|\rho(U,Z)|^2 - 4h(U)\,h(Z)}$$

et $\rho(U,Z) = (i(\bar Z_1 - U_1) - 2\sum_{k=2}^n U_k \bar Z_k)$ *est la fonction servant à définir les noyaux de Szegö et de Poisson.*

Démonstration. Comme D est un expace symétrique de rang 1 on a [15, p. 446]

$$G(p,q) = \int_{d(p,q)}^{+\infty} \frac{d\rho}{A(\rho)}, \tag{α}$$

où G est la fonction de Green, p, q 2 points de l'espace symétrique, $d(p,q)$ la distance géodésique de ces deux points et $A(\rho)$ l'aire de la boule de rayon ρ.

On va se ramener au centre de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par la transformation de Cayley Φ (voir [5]). Soit $B^h(0,\rho)$ la boule de centre 0 et de rayon ρ pour la métrique de Bergmann de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. (On désignera par le même symbole les boules de l'espace hermitien hyperbolique, de même pour les fonctions de Green correspondantes). On vérifie sans peine que si d^h désigne la distance pour métrique de Bergman on a pour $z \in B^{\mathrm{eucl}}(0,1)$ on a $|z| = th[d^h(0,z)]$ de sorte que $B^h(0,\rho) = B^{\mathrm{eucl}}(0,r)$ avec $r = th(\rho)$. On a $\Phi(0) = ie$ (où $e = (1, 0, n, 0)$ de $\mathbb{C}^n$. On pose pour $z \in B^{\mathrm{eucl}}(0,1)$ $Z = \Phi(z)$. Φ étant une isométrie pour les metriques de Bergmann respectives on a

$$d^h(ie,Z) = d^h(0,Z), \qquad \Phi(B^h(0,\rho)) = B^h(ie,\rho),$$

$$\text{Aire de } \partial B^h(0,\rho) = \text{Aire de } \partial B^h(ie,\rho) = A^h(\rho),$$

de sorte que

$$G(ie, Z) = G(0, z) = \int_{d^h(0,z)}^{+\infty} \frac{d\rho}{A^h(\rho)},$$

d'où la nécessité de calculer $A^h(\rho)$.

On note par dw^h et dw^e les éléments de volume de la boule respectivement pour la métrique de Bergmann et pour la métrique euclidienne et l'on a immédiatement

$$dw^h = \frac{dw^e}{(1 - |z|^2)^{n+1}}.$$

Puis en notant dA^h et dA^e les éléments d'aire hyperbolique et euclidien sur les surfaces des boules correspondantes on a aisément:

$$A^h(\rho) = \frac{2 \cdot \pi^n}{(n-1)!} \frac{r^{2n-1}}{(1 - r^2)^n} = \frac{2 \cdot \pi^n}{(n-1)!} \cdot ch\,\rho\, sh^{2n-1}\,\rho$$

$$V(\rho) = \int_0^\rho A^h(u)\, du \qquad [15 \text{ p. } 446]$$

et

$$V^h(\rho) = \frac{2 \cdot \pi^n}{(n-1)!} \int_0^r \frac{s^{2n-1}}{(1 - s^2)^{n+1}}\, ds = \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{r^{2n}}{(1 - r^2)^n} = \frac{\pi^n}{n!} Sh^{2n}\,\rho,$$

d'où avec un changement de variable évident

$$G(0, z) = \frac{(n-1)!}{2 \cdot \pi^n} \int_{|z|}^1 \frac{(1 - s^2)^{n-1}}{S^{2n-1}}\, ds.$$

On vérifie alors sans difficultés en posant

$$x = \frac{1 - |z|^2}{|z|^2}$$

que

$$\int_{|z|}^1 \frac{(1 - s^2)^{n-1}}{s^{2n-1}}\, ds$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(\text{Log}(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} \right),$$

d'où le calcul de $G(0, z)$ et utilisant Φ^{-1}

$$\phi^{-1}\left(\frac{Z_1 - i}{Z_1 + i} = z_1, z_k = \frac{2Z_K}{Z_1 + i}, K = 2,\dots, n\right).$$

On a alors par un calcul immédiat

$$|z|^2 = \frac{|Z_1|^2 + 1 + 2ImZ_1 - 4h(Z)}{|Z_1|^2 + 1 + 2DmZ_1} = \frac{|\rho(Z \cdot ie)|^2 - 4h(ie)\, h(Z)}{|\rho(Z, ie)|^2},$$

d'où

$$G(ie, Z) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{4 \cdot \pi^n} \left(\mathrm{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right)$$

avec

$$x = \frac{4h(ie)\, h(Z)}{|\rho(Z, ie)|^2 - 4h(ie)\, h(Z)}.$$

Pour passer à un couple quelconque de points on utilisera les deux groupes d'isométries de D, N et S. Soit $U \in D$ il existe $g = n \cdot s$ avec $n \in N$ et $s \in S$ tel que $g \cdot U = ie$. On remarque alors par la formule (α) que la fonction de Green est invariante sous l'action de N et S de sorte que si $Z = g \cdot Z'$ on aura $G(U, Z') = G(ie, Z)$. On vérifie enfin que

$$\frac{4h(ie)\, h(Z)}{|\rho(Z, ie)|^2 - 4h(ie)\, h(Z)} = \frac{4h(U)\, h(Z')}{|\rho(Z', U)|^2 - 4h(U)\, h(Z')},$$

d'où le lemme 4.1.

Remarque 1. Pour calculer la fonction de Green on pouvait aussi remarquer que c'est une fonction radiale. Comme le laplacien radial vaut:

$$\Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{A^h(\rho)} \frac{dA^h(\rho)}{d\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \qquad [15, \text{p. } 445]$$

et que $A^{h_1}(\rho)/A^h(\rho) = 2((n-1)\coth r + \coth 2r)$ (la racine $\frac{1}{2}$ a la multiplicité $2(n-1)$, la racine 1 est simple)

$$\Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2((n-1)\coth r + \coth 2r) \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$G(ie, Z)$ est alors une solution de $\Delta_\rho = 0$ avec les conditions aux limites habituelles. (Avec le changement de variable $u = r^2 = th^2\rho$, Δ_ρ devient $\Delta_u = u(1-u)^2\,(\partial/\partial u^2) + (1-u)\,(n-u)\,(\partial/\partial u)$ que l'on intègre facilement.)

Remarque 2. La partie abélienne dans la décomposition d'Invasawa étant $s^2(\partial^2/\partial s^2) - (n-1)\,s\,(\partial/\partial s)$ [5] les coordonnées horosphériques sont donc plus commodes que les coordonnées polaires.

Nous pouvons maintenant, pour $p \geqslant 2$, comparer l'intégrale d'aire de Calderón Lusin à la fonction de Littlewood–Paley introduite.

3. *Démonstration du théorème* 4

On pose

$$I^pG_Y(F) = \int_N (G(F)(x, Y))^p\, d\beta(x).$$

(a) *Pour* $p = 2$

$$I^2G_Y(F) = \int_Y d\beta(u) \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} \int_N \|\nabla F(x, s)\|^2\, G((x, s), (u, Y))\, d\beta(x)$$

par action isométrique du groupe nilpotent qui conserve globalement chaque horosphère on a avec $x = u \cdot v$

$$I_2G_Y(F) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} \int_N G((u \cdot v, s), (u \cdot 0, Y))\, d\beta(v)$$

$$\times \int_N \|\nabla F(u \cdot v, s)\|^2\, d\beta(u).$$

La fonction de Green étant invariante sous l'action de N cela nous donne

$$I^2G_Y(F) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} \int_N G((v, s), (0, Y)) \int_N \|\nabla F(u \cdot v, s)\|^2\, d\beta(u).$$

Mais $\int_N \|\nabla F(u \cdot v, s)\|^2\, d\beta(u) = \varphi(s)$ ne dépend pas de v, d'où

$$I^2G_Y(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}}\, ds \int_N G((v, s), (0, Y)\, d\beta(v).$$

D'un autre côté posant

$$I^2A_k(F) = \int_N d\beta(x) \int_{\Gamma_{a,k}(x)} \|\nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)$$

$$I^2A_k(F) = \int_N d\beta(x) \int_0^k \frac{ds}{s^{n+1}} \int_{B(x,as)} \|\nabla F(u, s)\|^2\, d\beta(u)$$

(ici $B(x, as)$ désigne la boule de Koranyi sur N de centre x et de rayon as).

Comme $B(x, as) = x \cdot B(0, as)$ et que $\int_{B(0,as)} d\beta(u) = C_n a^n s^n$ et aussi $\int_{x \cdot B(0,as)} \| VF(u, s)\|^2 \, d\beta(u) = \int_{B(0,as)} \| VF(x \cdot v, s)\|^2 \, d\beta(v)$ on a

$$I^2 A_k(F) = C_n a^n \int_0^k \frac{\varphi(s)}{s} \, ds.$$

Il nous suffit donc de comparer $\int_N G((u, s), (0, Y)) \, d\beta(u)$ et s^n posons

$$u = (u_1, u_2, ..., u_n), \qquad \text{où} \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad u_k \in \mathbb{C}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n,$$

on a

$$\frac{4h((u, s))\, h((0, Y))}{|\rho((u, s), (0, Y))|^2 - 4h((u, s))\, h((0, Y))}$$
$$= \frac{4sY}{(s + Y + \sum_{k=2}^n |u_k|^2)^2 + u_1^2 - 4sY} = a.$$

1. *Majoration de l'intégrale d'aire de Calderón Lusin*

On remarque tout d'abord par un calcul sans difficultés que pour: $0 < \lambda < 1$ fixé on a

$$\lambda \frac{a^n}{n} \leqslant (-1)^{n+1} \left(\operatorname{Log}(1 + a) - a + \frac{a^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{n-1} \right)$$

pour $0 \leqslant a < (1 - \lambda)/\lambda$.

Comme $0 < a \leqslant 4sY/(Y - s)^2$ il suffira de prendre la hauteur K du troncage en fonction de Y: $K = cY$ alors $a \leqslant 4c/(1 - c)^2$. Soit par exemple $C = 1/10$ et on peut prendre $\lambda = \frac{1}{2}$.

D'où pour $0 < s \leqslant K = CY$ (i)

$$G((u, s), (0, Y)) \geqslant c \left[\frac{4sY}{(s + Y + \sum_{k=2}^n |u_k|^2)^2 + (u_1)^2 - 4sY} \right]^n.$$

(On notera toujours par c les constantes ne dépendant que de n et de l'ouverture" a du cône.)

On a alors

$$I_n(s, Y) = cs^n Y^n \int_N \frac{d\beta(u)}{[(s + Y + \sum_{k=2}^n |u_k|^2) + (u_1)^2 - 4sY]^n}$$
$$\leqslant \int_N G((u, s), (0, Y)) \, d\beta(u).$$

En posant $u_1 = x$, $v = v_1, v_2, \ldots, v_{2n-2}$ on a

$$I_n(s, Y) = ds^n Y^n \int_0^{+\infty} dx \int_{\mathbb{R}^{2n-2}} \frac{dv_1\, dv_2 \cdots dv_{2n-2}}{[(s + Y + \|v\|^2)^2 + x^2 - 4sY]^n}$$

et en passant en coordonnées polaires

$$I_n(s, Y) = cs^n Y^n \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{r^{2n-3}\, dr}{[(s + Y + r^2)^2 + x^2 - 4sY]^n}$$

et avec $r^2 = t$

$$I_n(s, Y) = cs^n Y^n \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}\, dt}{[(s + Y + t)^2 + x^2 - 4sY]^n}.$$

Alors

$$(s + Y + t)^2 + x^2 - 4sY \leqslant (Y - s)^2 + t^2 + 6(Y - s)\, t + x^2$$

car par (i) $Y - s > s$ puis

$$(s + Y + t)^2 + x^2 - 4sY \leqslant (3(Y - s) + t)^2 + x^2 = A^2 + x^2$$

en intégrant en x il vient

$$I_n(s, Y) \geqslant cs^n Y^n \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1 + y^2)^n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}\, dt}{[3(Y - s) + t]^{2n-1}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}\, dt}{[3(Y - s) + t]^{2n-1}} = \frac{1}{3^n (Y - s)^n} \int_0^{+\infty} \frac{y^{n-2}\, dy}{(1 + y)^{2n-1}}$$

de sorte que

$$I_n(s, Y) > \frac{cs^n Y^n}{(Y - s)^n} \geqslant c' s^n,$$

ce qui fournit bien l'estimée souhaitée. Cela donne alors pour $Y > 0$

$$\begin{aligned} I_2 A_{cY}(F) &= \int_N d\beta(x) \int_{\Gamma_{a,cY}(x)} \|\nabla F(z)\|^2\, d\omega(z) \\ &\leqslant CI^2 G_Y(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} \int_N G((u, s), (0, Y))\, d\beta(u), \end{aligned}$$

d'où en passant au sup sur Y et en remarquant que $I^2A_k(F)$ est croissante de k on a

$$\sup_{k>0} I^2A_k(F) = (\|F\|_2^4) \leqslant C \sup_{Y>0} I^2G_Y(F) = C(\|G(F)\|_2)^2.$$

Dans tout cela on suppose toujours que la quantité qui domine est finie sans quoi il n'y a rien à prouver.

2. *Minoration de l'intégrale d'aire de Calderón Lusin*

Pour la minoration il faut prendre un peu plus de précautions: On ne peut éviter la singularité de la fonction de Green.

On a déjà comme précédemment pour la majoration

$$\int_N G((u,s),(0,Y))\,d\beta(u) = c_n(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} dx$$
$$\times \int_0^{+\infty}\left[\operatorname{Log}(1+a) - a + \frac{a^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{n-1}\right] c^{n-2}\,dt$$

avec

$$a = \frac{4sY}{(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY}, \qquad \left(t = \sum_{k=2}^{n} |u_k|^2, x = u_1\right).$$

On écrira l'intégrale sous la forme

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dt + \int_A^B dx \int_0^A dt + \int_B^{+\infty} dx \int_0^A dt$$

et on utilisera suivant les cas les estimées suivantes de la fonction de Green qui sont faciles à vérifier.

(1) Pour tout a $G((u,s),(0,Y)) \leqslant a^{n-1}/(n-1)$.

(2) Pour tout $a < 1$ $G((u,s),(0,Y)) \leqslant a^n/n$.

On prendre $A^2 = B^2 = \lambda sY$ avec λ assez grand pour que $a < 1$ sur le domaine d'intégration considéré.

Alors pour le premier morceau on aura

$$① = \int_0^{+\infty} dx \int_A^{+\infty} dt \leqslant cs^nY^n \int_0^{+\infty} dx \int_A^{+\infty} \frac{t^{n-2}}{[(s+Y+t)^2 - 4sY]^n}$$

et comme pour la minoration on a

$$① \leqslant cs^nY^n \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)^n} \int_A^{+\infty} \frac{t^{n-2}\,dt}{[(s+Y+t)^2 - 4sY]^{2n-1/2}}$$

alors

$$J = \int_A^{+\infty} \frac{t^{n-2}\,dt}{A[(s+Y+t)^2 - 4sY]^{(2n-1)/2}} \leqslant \int_{A+s+Y}^{+\infty} \frac{v^{n-2}\,dv}{(v^2 - 4sY)^{(2n-1)/2}}$$

et avec $v = (sY \cdot y)^{1/2}$

$$J \leqslant \frac{1}{(sY)^{n/2}} \int_{(A+s+Y)/(sY)^{1/2}}^{+\infty} \frac{dy}{(y^2-4)^{(2n-1)/2}}$$
$$\leqslant \frac{1}{(sY)^{n/2}} \int_3^{+\infty} \frac{dy}{(y^2-4)^{2n-1/2}}$$

en prenant $A = 3(sY)^{1/2}$, d'où ①$\leqslant C_1(sY)^{n/2}$. En prenant aussi $B = 3(sY)^{1/2}$ on aura encore de la même manière que pour ① en intégrant cette fois d'abord en t et en regardant bien les estimées.

$$③ = \int_B^{+\infty} dx \int_0^A dt \leqslant C_2(sY)^{n/2}.$$

Pour ②$= \int_0^A dx \int_0^A dt$ il suffit d'utiliser l'estimée (1) de la fonction de Green.

$$② \leqslant (sY)^{n-1} \int_0^A dx \int_0^A \frac{t^{n-2}\,dt}{[(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY]^{n-1}}.$$

On supposera ici que $(1/c)\,Y \leqslant s \leqslant cY$.

(3) Avec, par exemple, $c = 10$ de sorte que

$$(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY \geqslant x^2 + t^2 + 2t(s+Y) \geqslant x^2 + t^2 + 2cY.$$

Alors

$$I = \int_0^A \frac{dx}{[(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY]^{n-1}}$$
$$\leqslant \int_0^A \frac{dx}{[x^2 + t(t+2cY)]^{n-1}} = \int_0^A \frac{dx}{(x^2+m^2)^{n-1}}$$

ce qui donne

$$I \leqslant \frac{1}{m^{2n-3}} \int_0^{A/m} \frac{dy}{(y^2+1)^{n-1}} < \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)^{n-1}} \frac{1}{m^{2n-3}},$$

d'où

$$② \leqslant c(sY)^{n-1} \int_0^A \frac{t^{n-2}}{[t(t+2cY)]^{(2n-3)/2}},$$

$$② \leqslant c\,\frac{(sY)^{n-1}}{Y^{n-3/2}} \int_0^{3(sY)^{1/2}} \frac{dt}{t^{1/2}} < cs^n,$$

en tenant compte de l'hypothèse $(1/c)\, Y \leqslant s \leqslant cY$.

Ce qui donne donc avec cette hypothèse

$$\int_N G((u, s), (0, Y))\, d\beta(u) \leqslant cs^n.$$

(4) Il reste à voir l'estimée pour $s < (1/c)\, Y$ et $s \geqslant cY$ dans ce cas on a toujours $a < 1$ et l'on peut utiliser d'un seul coup l'estimée (1) de sorte que

$$\int_N G((u, s), (c, Y))\, d\beta(u)$$

$$\leqslant s^n Y^n \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}\, dt}{[(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY]^{n-1}} = I_n.$$

On remarque que

$$(s+Y+t)^2 + x^2 - 4sY \geqslant (Y-s+t)^2 + x^2.$$

On a alors de suite en intégrant en x

$$I_n \leqslant \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}\right) y^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}\, dt}{(Y-s+t)^{2n-1}}$$

puis intégrant en t il vient comme pour la minoration

$$I_n \leqslant C\, \frac{s^n Y^n}{|Y-s|^n}.$$

Finalement compte tenu de (4) il vient

$$I_n \leqslant cs^n$$

et regroupant toutes les estimées pour tout $s > 0$, tout $Y > 0$ on a

$$\int G((u, s), (0, Y))\, d\beta(u) \leqslant cs^n,$$

d'où

$$\| G(F)\|_2 \leqslant C \| F\|_2^A$$

(b) *Démonstration pour* $p \geqslant 2$. On raisonnera par dualité, comme il est fait usuellement, pour faire "sauter les radicaux". Pour cela soit q l'exposant conjugué de $P/2$. Comme on a

$$(\| f\|_p)^2 = \sup_{\substack{\|g\|_q \leqslant 1 \\ g < 0}} \int (f(x))^2\, g(x)\, dx.$$

On aura aussi

$$\left(\int_N d\beta(u) \left(\int_{\Gamma_{a,k}(u)} \| \nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)\right)^{p/2}\right)^{2/p}$$

$$= \sup_{\substack{\|g\|_q \leqslant 1 \\ g > 0}} \int_N g(u)\, d\beta(u) \int_{\Gamma_{a,k}(u)} \| \nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)$$

$$\left(\int_N d\dot{\beta}(u) \left[\int_D G(z, (u, Y))\, \| \nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)\right]^{p/2}\right)^{2/p}$$

$$= \sup_{\substack{\|g\|_q \leqslant 1 \\ g > 0}} \int_N g(u) d\beta(u) \int_N G(z, (u, Y))\, \| \nabla F(z)\|^2\, d\omega(z)$$

posant $\| \nabla F\|^2 = \varphi$ on a encore en posant

$$IG_Y(F, g) = \int_N g(u)\, d\beta(u) \int_D G(z, (u, Y))\, \varphi(z)\, d\omega(z),$$

$$IA_k(F, g) = \int_N g(u)\, d\beta(u) \int_{\Gamma_{a,k}(u)} \varphi(z)\, d\omega(z).$$

On a encore comme précédemment

$$IG_Y(F, g) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} \int_N g * \varphi(\cdot, s)(u)\, G((u, s), (0, Y))\, d\beta(u),$$

$$IA_k(F, g) = \int_0^k \frac{ds}{s^{n+1}} \int_{B(0,as)} g * \varphi(\cdot, s)(u)\, d\beta(u).$$

Il suffit alors de comparer

$$\int_N G((u, s), (0, Y))\, g * \varphi(\cdot, s)(u)\, d\beta(u) \quad \text{et} \quad \int_{B(0,as)} g * \varphi(\cdot, s)(u)\, d\beta(u)$$

et cela se fait comme pour $p = 2$ en tenant compte de l'harmonicité de F.

Remarque. L'estimée $\|G(F)\|_p \leqslant C\|F\|_p^A$, $2 < p < +\infty$, résultat déjà du théorème 3 et de son corollaire.

4. *Fonction de Littlewood–Paley de Koranyi et Vagi et prolongements des théorèmes* 3 *et* 4

Le calcul de $I^2A_k(F)$ montre qu'il s'introduit naturellement une autre fonction de Littlewood–Paley due à Koranyi et Vagi (voir [21]). Pour F harmonique dans D et $x \in N$ on pose

$$g(F)(x) = \left(\int_0^{+\infty} \|\nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

et cette fonction de Littlewood–Paley est à rapprocher de la fonction de Littlewood–Paley classique définie sur le domaine $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$: $g(f)(x) = (\int_0^{+\infty} y\|\nabla f(x, y)\|^2\, dy)^{1/2}$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|\nabla f\|$ est la norme euclidienne du gradient.

On a alors

$$\sup_{k>0} I^2A_k(F) = c_n a^n \int_N d\beta(u) \int_0^{+\infty} \|\nabla F(u, s)\|^2 \frac{ds}{s}$$
$$= c_n a^n (\|g(F)\|_{L^2(N)})^2$$

soit $\|F\|_2^A = (c_n a^n)^{1/2} \|g(F)\|_2$.

On peut même remarquer que comme dans le cas euclidien (voir [31]) la fonction d'aire $A(F, a)$ domine la fonction de Littlewood–Paley $g(F)$.

LEMME 4.1. *Il existe une constante C ne dépendant que de a et n telle que pour toute fonction F harmonique dans D on ait*

$$g(F)(x) \leqslant CA(F, a)(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in N.$$

Démonstration. Elle suit celle de [31]

$$\int_0^{+\infty} \|\nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{1/2^{k+1}}^{1/2^k} \|\nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+2}} \|\nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s}.$$

On va majorer $\int_{1/2^{k+1}}^{1/2^k} \|\nabla F(x, s)\|^2\, ds/s = I_k$.

Soit $s_k \in [1/2^{k+1}, 1/2^k$ tel que $\sup_{s \in [1/2^{k+1}, 1/2^k]} \|\nabla F(x, s)\| \leqslant \|\nabla F(x, s_k)\|$, d'où $I_k \leqslant \operatorname{Log} 2 \|\nabla F(x, s_k)\|^2$. Mais $\|\nabla F\|^2$, bien que non sousharmonique, vérifie une propriété de "presque" sous moyenne en volume (voir la preuve du lemme 2.1 chapitre III).

Si B_ρ est la boule géodésique de centre (x, s_k) et de rayon ρ on a

$$\| \nabla F(x, s_k)\|^2 \leqslant C(\rho) \int_{B_\rho} \| \nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z).$$

On pose encore $r = th\, \rho$ et on utilise une remarque déjà faite concernant les boules géodésiques si $z \in B_\rho(x, s_k)$ alors

$$s_k \frac{1-r}{1+r} \leqslant h(z) \leqslant s_k \frac{1+r}{1-r},$$

d'où si $0 < r < 1/3$

$$\frac{1}{2^{k+2}} \leqslant \frac{s_k}{2} \leqslant k(z) \leqslant 2s_k \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

de sorte que $B_\rho(x, s_k)$ rencontre au plus quatre boules de la famille. On utilise maintenant la caractérisation des domaines admissibles par empilement de boules géodésiques de rayon constant (Proposition 4.3 de [5]). Pour tout $a > 0$ donné il existe $\rho > 0$ tel que

$$\bigcup_{s>0} B_\rho(x, s) \subset \Gamma_a(x),$$

ce qui nous donne

$$\int_0^1 \| \nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s} \leqslant 4 \operatorname{Log} 2 C_\rho \int_{\Gamma_a(x)} \| \nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z).$$

La même démonstration nous donne

$$\int_1^{+\infty} \| \nabla F(x, s)\|^2 \frac{ds}{s} \leqslant 4 \operatorname{Log} 2 C_\rho \int_{\Gamma_a(x)} \| \nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z),$$

d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE 4.2. *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de a, p et n telle que pour tout $0 < p < +\infty$ et toute fonction F harmonique dans D on ait*

$$\| g(F)\|_p \leqslant C \, \| F\|_p^N.$$

La preuve résulte du lemme 4.1 et du théorème 2.

Remarque. Dans [21] on démontre que pour $1 < p < +\infty$ $\| g(F)\|_p \leqslant C \|F\|_p$

LEMME 4.3. *Il existe une constante C telle que*

$$\int_N G((x, s), (u, Y))\, d\beta(u) = C \inf(s^n, Y^n).$$

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} H_Y(x, s) &= \int_N G((x, s), (u, Y))\, d\beta(u) \\ &= \int_N G((0, s), (x^{-1} \cdot u, Y))\, d\beta(u) \\ &= \int_N G((0, s), (v, Y))\, d\beta(v), \end{aligned}$$

d'où $H_Y(x, s)$ est une fonction harmonique "radiale" positive sur $D - \Lambda_Y$. De plus elle est continue, comme on peut aisément le vérifier à la main, ou par le fait que c'est un potentiel de Green d'une fonction régulière.

On a $H_Y(x, 0_+) = 0$. De plus il résulte de l'estimée non évidente du théorème 4 que $H_Y(x, s) \leqslant Cs^n$; s et Y jouant des rôles symétriques on a aussi $H_Y(x, s) \leqslant CY^n$.

On est donc amené à étudier sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions H_Y continues sur $]0, +\infty[$, C^2 sur $]0, Y[U]\ Y, +\infty[$ telles que

$$s^2 \frac{\partial^2 H_Y}{\partial s^2} - (n-1)\, s \frac{\partial H_Y}{\partial s} = 0,$$

comme toute solution est de la forme $Cs^n + b$ d'après les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \text{sur}\,[0, Y[\ H_Y(s) &= Cs^n, \\ \text{sur}\,[Y, +\infty[\ H_Y(s) &= CY^n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. $G(z, (u, Y)) = G_{(u,Y)}(z)$ est la fonction harmonique minimale de pôle (u, Y), $z = (x, s) \to s^r$ est la fonction harmonique minimale de pôle le point à l'infini, le résultat n'est donc pas fortuit.

On peut maintenant identifier toutes les fonctions d'aires dans le cas $p = 2$.

Proposition 4.4. *Il existe une constante C_1 ne dépendant que de n, une constante C_2 dépendant de n et a telles que pour toute fonction F harmonique dans D on ait (si $F \in H^2$ et f est sa valeur au bord)*

$$\|F\|_2 = \|f\|_2 = \|G(F)\|_2 = (\lim_{Y \to \infty} I^2 G_Y(F))^{1/2}$$
$$= C_1 \| g(F)\|_2 = C_2 \|A(F)\|_2.$$

Démonstration. Il n'y a qu'à montrer que $\|f\|_2 = \|G(F)\|_2 = C_1 \| g(F)\|_2$ le reste étant déjà vu.

Partant de la formule d'Ito on a

$$E_{(x,Y)}(F(X_\omega(t)))^2 = F^2(x, Y) + E_{(x,Y)}\left(\int_0^t \| \nabla F(X_\omega(t)\|^2 \, dt\right).$$

Comme pour $t \to \infty$ $X_\omega(t)$ converge vers un point de N (Le problème de convergence est immédiat: la martingale $F(X_\omega(t))$ est dans L^2), que la valeur au bord f est dans $L^2(N)$, mais aussi que la distribution $X_\omega(\infty)$ est donnée par le noyau de Poisson (Lemme 1.2 du chapitre III de [5]) la formula d'Ito pour $t = +\infty$ s'écrit

$$f^2 * P_Y(x) - F^2(x, Y) = \int_D G(z, (x, Y)) \| \nabla F(z)\|^2 \, d\omega(z)$$

(il s'agit en fait de la décomposition de Riesz de la fonction sous harmonique F^2: $f^2 * P_Y(x)$ est la plus petite majorante harmonique de F^2 et $G^2(F)$ le défaut d'harmonicité).

En intégrant sur N

$$\int_N d\beta(x) \int_N P_Y(x^{-1} \cdot u) \, f^2(u) \, d\beta(u) - \int_N F^2(x, Y) \, d\beta(x) = I^2 G_Y(F).$$

Utilisant alors le lemme 1.4 chapitre II de [5] et le lemme 4.3 on a

$$(\|f\|_2)^2 - \int_N F^2(x, Y) \, d\beta(x)$$
$$= I^2 G_Y(F) = C \int_N d\beta(x) \int_0^{+\infty} \| \nabla F(x, s)\|^2 \inf(s^n, Y^n) \frac{ds}{s^{n+1}}$$

La conclusion résulte alors du corollaire 1.3 chapitre III.

Corollaire 4.5. *Pour tout $1 < p < +\infty$, il existe une constante C ne dépendant que de p et n telle que pour toute fonction F harmonique dans $D(F \in H^p)$ on ait*

$$\| g(F)\|_p \geqslant C \|F\|_p.$$

La démonstration est immédiate par polarisation de l'égalité L^2 en appliquant le corollaire 4.2.

Remarque. Voir dans [21] une autre démonstration du fait que $\| g(F)\|_2 = C \|f\|_2$.

On va maintenant comparer $\|G(F)\|_p$ à $\|F\|_p$. On sait déjà par les théorèmes 3 et 4 que pour $2 \leqslant p < +\infty$ il existe deux constantes c_p et C_p telles que

$$c_p \|F\|_p \leqslant \|G(F)\|_p \leqslant C_p \|F\|_p.$$

COROLLAIRE 4.6. *Soit $f \in L^p(N)$, $1 < p < +\infty$, et $F(x, s) = f * p_s(x)$ alors il existe une constante c dépendant seulement de p et n telle que*

$$\|F\|_p \leqslant c \|G(F)\|_p.$$

Démonstration. On sait déjà que le résultat est vrai pour $2 \leqslant p < +\infty$. Pour l'établir pour $1 < p < 2$ on va presque polariser l'égalité L^2 du corollaire précédent; on utilisera les notations du corollaire 1.1 du chapitre III. On considère l'application linéaire T_Y de $L^2(N)$ dans $T(L^2(N))$ ainsi définie: soit $f \in L^2(N)$

$$T_Y(f) = (T_{1Y}(f), \dots, T_{nY}(f)),$$

où $T_{iY}(f)$ est définie pour $(x \in N,\ U \in D)$ par

$$T_{iY}(f)(x, U) = VG((x, Y), U) \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ki}(U) \frac{\partial F}{\partial z_k}(U)$$

avec pour produit scalaire hermitien

$$\langle T_Y f, T_Y h\rangle = \int_N d\beta(x) \int_D G((x, Y), U) \sum_{k,p=1}^{n} g^{kp}(v) \frac{\partial F}{\partial z_k}(v) \overline{\frac{\partial H}{\partial z_p}}(v)\, d\omega(v),$$

où H est le prolongement harmonique de h.

Par construction $\langle T_Y f, T_Y f\rangle = I^2 G_Y(F)$.

Soient alors $f \in L^2 \cap L^p(\partial D)$ $h \in L^2 \cap L^q(\partial D)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Y_0(f, h)$ tel que pour tout $Y \geqslant Y_0$ on ait, vu que l'on a un sup croissant,

$$(\|f\|_2)^2 - \varepsilon \leqslant (\|T_Y(f)\|_2)^2 \leqslant (\|f\|_2)^2 + \varepsilon$$

et de même pour h et $h + f$ de sorte que l'on a pour $Y \geqslant Y_0$

$$|\langle f, h\rangle| \leqslant \frac{3\varepsilon}{2} + |\langle T_Y(f), T_Y(h)\rangle|$$

puis on a comme précédemment

$$|\langle T_Y(f), T_Y(h)\rangle| \leqslant (I^p G_Y(F))^{1/p} (I^q G_Y(H))^{1/q}.$$

Mais pour $q \geqslant 2$ on a

$$(I_q G_Y(H))^{1/q} \leqslant \sup_{Y>0} (I^q_{G_Y}(H))^{1/q} \leqslant C_q \|H\|_q,$$

d'où

$$|\langle f, h\rangle| \leqslant C_q \sup_{Y>0} (I^p_{G_Y}(F))^{1/p} \|H\|_q + \frac{3\varepsilon}{2}$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Soit: $C_q \|G(F)\| \geqslant \|f\|_p$, $1 < p \leqslant 2$.

Remarque. Pour $1 < p < 2$, on a $E^{\beta_s}(\int_0^{+\infty} \|\nabla F(X_\omega)\|^2 \, dt)^{p/2} \leqslant IG^p_s(F)$.
Il resterait à démontrer l'estimée $\|G(F)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$, $1 < p < 2$.

Remarque. On pouvait aussi considérer la fonction de Littlewood Paley g_r associée au champ de vecteur radial $s(\partial/\partial s)$. Alors $g_r(F)(x) = (\int_0^{+\infty} s(\partial F(x,s)/\partial s)^2 \, ds)^{1/2}$ on a $g_r(F)(x) \leqslant g(F)(x)$ et on pourrait encore montrer que

$$\|g(F)\|_p \approx \|g_r(F)\|_p \qquad 1 < p < +\infty.$$

En fait on a une définition complètement intrinsèque de la fonction g_r. Si γ_x est la géodésique joignant le point à l'infini à $x \in N$, T est le champ $s(\partial/\partial s)$ et $d\sigma(s) = (ds/s)$ (T est le champ de vecteur tangent à γ_x, il est de norme 1 pour la restriction de la métrique à γ_x et $d\sigma(s)$ est l'élément de volume correspondant.) Alors

$$g_r^2(f)(x) = \int_{\gamma_x} (TF)^2 \, d\sigma$$

nous allons utiliser la fonction g_r pour obtenir un raffinement du théorème 3.

THÉORÈME 3BIS. *Soit* $1 < p < +\infty$; *soit* F *harmonique dans* D *telle que il existe* $Y_0 > 0$ *tel que pour* $Y \geqslant Y_0$ $\|f_Y\|_p < C$ $(f_Y(x) = F(x, Y))$ *et telle que* $\|g_r(F)\|_p < +\infty$ *alors* $F \in H^p$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}|F(x, Y) - F(x, s_0)| &= \left|\int_s^Y \frac{\partial F}{\partial s}(x, s) \, ds\right| \\ &\leqslant \left(\operatorname{Log}\frac{Y}{s_0}\right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} s\left(\frac{\partial F}{\partial s}(x, s)^2 \, ds\right)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Comme on peut toujours supposer que $Y/s_0 > e$ puisque on s'intéresse à la situation $Y \to \infty$ et $s_0 \to 0$ on aura

$$|F(x, Y) - F(x, s_0)| \leqslant \operatorname{Log} \frac{Y}{s_0} g_r(F)(x)$$

et pour $Y \geqslant Y_0$

$$\|f_{s_0}\|_p \leqslant C + \operatorname{Log} \frac{Y}{p_0} \| g_r(F)\|_p$$

et avec $s_k = 2^{-k}$

$$\|f_k\|_p = \|f_{s_k}\|_p \leqslant C + k \operatorname{Log} 2Y \| g_r(F)\|_p$$

et comme $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}(k \operatorname{Log} 2Y \| g_r(F)\|_p + C) < +\infty$ on peut appliquer le théorème 1 et F admet des valeurs au bord dans W_p^{-1}. La démonstration se poursuit alors comme au théorème 3.

V. Relation entre la fonction de Littlewood–Paley associée à la fonction de Green et les fonctions a oscillation moyenne bornée, étude de H^1 et dualité H^1 B.M.O.

On trouvera une relation entre les fonctions à oscillation moyenne bornée sur N et la fonction de Littlewoord–Paley du chapitre IV; des applications de cette relation qui nous permettront, en utilisant la caractérisation probabiliste de H^1, de compléter l'étude de H^1 et de démontrer que B.M.O. est le dual de H^1.

1. *Les fonctions à oscillation moyenne Bornée sur le groupe d'Heisenberg N de dimension* $2n - 1$

On part de la boule unité de Koranyi centrée en 0 sur N

$$B_1(0) = \left\{ x = (u, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}; |x|_1 = \max\left(|u|, \sum_1^{n-1} |z_k|^2\right) \leqslant 1 \right\}$$

et par action à gauche de N et action de S $(sx = (su, s^{1/2}z))$ la boule de Koranyi de centre x et rayon s est alors $B_s(x)) = s \cdot x \cdot B_1(0)$.

Posant

$$C_n = \int_{B_1} d\beta(x) \quad \text{on a} \quad \int_{B_s(x)} d\beta(v) = s^n C_n = |B_s|$$

DÉFINITION 1.1. f est une fonction à oscillation moyenne bornée sur N (B.M.O.) si elle est localement intégrable et si

$$\sup_{\substack{s\in S\\ x\in N}} \frac{1}{|B_s|}\int_{B_s(x)} |f(v)-f_{B_s(x)}|\, d\beta(v) = \|f\|_{\mathrm{B.M.O.}} < +\infty,$$

où $f_{B_s(x)} = 1/|B_s| \int_{B_s(x)} f(v)\, d\beta(v)$.

On remarque tout de suite, par la forme choisie pour la définition que les deux groups S et N opèrent sur les fonctions B.M.O. par translation à gauche. Si f est une fonction B.M.O. alors pour tout $s \in S$ et tout $x \in N$ $f_{s,x}$ (définie par $f_{s,x}(v) = f(s \cdot x \cdot v)$) est aussi une fonction B.M.O. avec même norme.

On remarque aussi qu'on pouvait tout aussi bien définir B.M.O. à partir d'une autre jauge homogène, par exemple avec la jauge $|\cdot|_2$:

$$|x|_2 = \left(u^2 + \left(\sum_1^{n-1} |z_k|^2\right)^2\right)^{1/2}.$$

On note par B'_1 la boule unité pour cette jauge. Comme $B'_1 \subset B_1 \subset 2^{1/2} B'_1$ il existe deux constantes c et d telles que

$$C\,\|f\|_{\mathrm{B'.M.O.}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{B.M.O.}} \leqslant d\,\|f\|_{\mathrm{B'.M.O.}},$$

où $\|f\|_{\mathrm{B'.M.O.}}$ est la norme B.M.O. pour la jauge $|\cdot|_2$. Le choix de la jauge n'a donc pas d'importance.

Comme sur un expace de type homogène, ici N avec pour paramètres $k = 2$ et $A = 2^n (|x \cdot x'| \leqslant 2(|x| + |x'|)$, $|B_{2,s}| = 2^n\,|B_s|)$.

On a le théorème de décomposition de Riesz, Caldéron et Zygmund (théorème 2.2 p. 72 de [2]) que l'on rappelle dans notre situation. (Voir aussi [21].)

THÉORÈME. *Soit f une fonction à support borné, $f \in L^1(N, d\beta)$ et $\alpha > 0$. Il existe une constante C ne dépendant que de k et A et une suite de boules $B_{s_i}(x_i)$, notée B_i, telle que*

(1) $|f(x)| < \alpha C$ *presque partout sur* $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$;

(2) pour tout i $1/|B_i| \int_{B_i} f(x)\, d\beta(x) \leqslant \alpha C$;

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leqslant C/\alpha \int_N |f(x)|\, d\beta(x)$.

On en déduit le lemme suivant (lemme 1 de John et Nirenberg de [16] dans le cadre de $\mathbb{R}^n$) dans la situation d'un espace de type homogène. La démonstration est pratiquement la même à partir du théorème de décomposition.

LEMME 1.2. *Soit f une fonction à oscillation moyenne bornée sur N. Alors pour tout $s \in S$ tout $x \in N$ et tout $\sigma > 0$*

$$\beta\{v \in B_s(x) : |f(v) - f_{B_s(x)}| \geqslant \sigma\} \leqslant k\,|B_s|\exp(-b\sigma\,\|f\|_{\mathrm{B.M.O.}}^{-1}),$$

où k et b sont des constantes qui ne dépendent que de n.

On en déduit de suite que pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, B.M.O.$_p$ = B.M.O. avec des normes équivalentes. B.M.O.$_p$ étant défini par

$$\sup_{\substack{s \in S\\ x \in N}} \frac{1}{|B_s|}\int_{B_s(x)} |f(v) - f_{B_s(x)}|^p\, d\beta(v) = (\|f\|_{\mathrm{B.M.O.}_p})^p.$$

2. *Démonstration du théorème* 6 *et étude de ses premières conséquences.*

De l'observation faite par C. Fefferman et E. Stein dans [9] que si f est dans B.M.O. de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_B|\, dx}{1 + \|x\|^{n+1}} \leqslant A\,\|f\|_{\mathrm{B.M.O.}}$$

on peut penser avoir des estimées du même ordre dans notre situation et utiliser la connaissance explicite du noyau de Poisson Bergmann et l'action des groupes N et S pour obtenir une caractérisation de B.M.O. à l'aide des fonctions harmoniques dans D.

Démonstration du théorème 6. Partant du noyau de Poisson $P_s(x) = C_n s^n(u^2 + (s + \|z\|^2)^2)^{-n}$ $(x = (u, z),\ \|z\|^2 = \sum |z_n|^2)$ on remarque que $P_s(s \cdot x) = s^{-n}P_1(x)$ et $d\beta(s \cdot x) = s^n\, d\beta(x)$, d'où l'on a

$$f * P_s(x) = \int_N f(x \cdot v^{-1})\, P_s(v)\, d\beta(v) = \int_N f(s \cdot x \cdot v^{-1})\, P_1(v)\, d\beta(v).$$

Soit $f * P_s(x) = f_{s,x} * P_1(0)$. De sorte que si f est dans $L^\lambda(N)$ $f_{s,x}$ l'est aussi et si $|f| * P_1(0)$ est fini $f * P_s(x)$ l'est aussi pour tout $s \in S$ et tout $x \in N$; de même si f est dans B.M.O. $f_{s,x}$ l'est aussi et $\|f\|_{\mathrm{B.M.O.}} = \|f_{s,x}\|_{\mathrm{B.M.O.}}$. L'existence de $|f| * P_1(0)$ implique donc dans ces cas celle de $f * P_s(x)$. On va donc majorer $|f|^\lambda * P_1(0)$ pour $1 \leqslant \lambda < +\infty$ où f est une fonction B.M.O. sur N. On procède comme pour des estimées de fonctions maximales: On découpe N en couronnes sur lesquelles on approxime le noyau de Poisson. On part de B_1 (que l'on notera B_0) et on fait agir les dilatations en prenant la suite de boules $B_k = 2^{\lambda k}B_0$ où $k \in \mathbb{N}$. Sur $N - B_k$ on a l'estimée facile du noyau de Poisson $P_1(x) \leqslant C2^{-\lambda k 2n}$. Au lieu de regarder $|f|^\lambda$ on prendra $|f - f_{B_0}|^\lambda$ ce qui ne changera rien à la méthode mais permettra de faire apparaître la norme B.M.O. (Les fonctions B.M.O. sont définies à une constante additive près)

$$\int_N |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda P_1(x)\, d\beta(x)$$

$$= \int_{B_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \int$$

$$\leqslant C \left(\left(\int_{B_0} |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\lambda k 2n} \int_{B_k - B_{k-1}} |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x) \right.\right.$$

On utilise cette estimée du noyau de Poisson pour réarranger cette somme

$$\int_N |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda P_1(x)\, d\beta(x)$$

$$\leqslant C(1 - 2^{-\lambda 2n}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\lambda 2n} \right) \left(\left(\int_{B_0} |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x) \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\lambda k 2n} \int_{B_k - B_{k-1}} |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x) \right),$$

ce qui donne après regroupement

$$\int_N |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda P_1(x)\, d\beta(x)$$

$$\leqslant C(1 - 2^{-\lambda 2n}) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\lambda k 2n} \int_{B_k} |f(x^{-1}) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x).$$

On estime alors $\int_{B_k} |f(x) - f_{B_0}|^\lambda \; d\beta(x)$; on a déjà aisément

$$\left(\int_{B_k} |f(x) - f_{B_0}|^\lambda d\beta(x) \right)$$

$$\leqslant 2^\lambda \left(\int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}|^\lambda d\beta(x) + 2^{\lambda k n} C_n |f_{B_k} - f_{B_0}|^\lambda \right).$$

D'après la généralisation du lemme de John Nirenberg

$$\int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}|^\lambda d\beta(x) < 2^{\lambda n k} C_1 \cdot C_n \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}.$$

On estime $|f_{B_0} - f_{B_k}|$ comme dans [9]

$$|f_{B_{k-1}} - f_{B_k}| = \frac{1}{|B_{k-1}|}\left|\int_{B_{k-1}} (f(x) - f_{B_k})\, d\beta(x)\right|$$

$$< 2^{-\lambda(k-1)n} C_n^{-1} \int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}|\, d\beta(x)$$

$$< 2^{-\lambda(k-1)} C_n^{-1} |B_k|\, \|f\|_{\text{B.M.O.}} = 2^{\lambda n} \|f\|_{\text{B.M.O.}},$$

d'où

$$|f_{B_0} - f_{B_k}| \leqslant k\, 2^{\lambda n} \|f\|_{\text{B.M.O.}}$$

et

$$\int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}|^\lambda\, d\beta(x) \leqslant C_n \cdot 2^{(nk+1)\lambda}(C_1 + k^\lambda 2^{\lambda^2 n}) \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}.$$

Finalement

$$|f - f_{B_0}|^\lambda * P_1(0) \leqslant C \cdot C_n 2^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\lambda k n}(C_1 + \kappa^\lambda 2^{\lambda^2 n}) \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}$$

$$= C(\lambda) \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}.$$

En particulier $|f|^\lambda * P_s(x)$ existe pour tout $1 \leqslant \lambda < +\infty$ tout $s \in S$ tout $x \in N$ et $F(x, s) = f * P_s(x)$ *et* $f^2 * P_s(x)$ sont des fonctions harmoniques dans D. Puis

$$|f - f * P_1(0)| \leqslant |f - f_{B_0}| + |f_{B_0} - f * P_1(0)|$$

$$|f_{B_0} - f * P_1(0)| = \left|\int_N (f(x) - f_{B_0}) P_1(x)\, d\beta(x)\right| \leqslant C \|f\|_{\text{B.M.O.}},$$

d'où $|f - f * P_1(0)|^\lambda * P_1(0) \leqslant C'(\lambda) \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}$.

Utilisant encore l'action de S et N on a pour tout $1 \leqslant \lambda < +\infty$ tout $s \in S$ et tout $x \in N$

$$|f - f * P_s(x)|^\lambda * P_s(x) \leqslant C'(\lambda) \|f\|^\lambda_{\text{B.M.O.}}$$

et avec $\lambda = 2$, $f^2 * P_s(x) - (f * P_s(x))^2 \leqslant C \|f\|^2_{\text{B.M.O.}}$.

Maintenant la fonction $f^2 * P_s(x)$ est la plus petite majorante harmonique de la fonction sous harmonique F^2 et le défaut d'harmonicité est donné par le potentiel de Green de $\Delta F^2 = 2\, \|\nabla f\|^2$ et $f^2 * P_s(x) - F^2(x, s) = G^2(f)(x, s)$.

Réciproquement. Soit f mesurable sur N telle que $|f| * P_1(0)$ soit fini, par l'argument déjà utilisé f se prolonge partout par $f(x, s) = f * P_s(x)$ et on suppose que $\|G(f)\|_{L^\infty(D)} \leqslant C$. On en déduit alors que $f^2 * P_s(x)$ est fini soit en appliquant le théorème de Riesz à la fonction sous harmonique F^2 en tenant compte que le potentiel de Green de ΔF^2 est borné, soit en appliquant la formule d'Ito à $F^2(X_\omega(t))$. Utilisant une inégalité de concavité avec l'exposant 1/2 on a:

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{s\in S\\ x\in N}} \int_N |f(xv^{-1}) - f * P_s(x)|\, P_s(v)\, d\beta(v)\\ &\qquad \leqslant \sup_{\substack{s\in S\\ x\in N}} \left(\int_N (f(x\cdot v^{-1}) - f * P_s(x))^2\, P_s(v)\, d\beta(v)\right)^{1/2} \leqslant C.\end{aligned}$$

Utilisant une fois encore l'action des deux groupes cela s'écrit naivement

$$\sup_{\substack{s\in S\\ x\in N}} |f_{s,x} - f_{s,x} * P_1(0)| * P_1(0) \leqslant C.$$

Il n'y a plus qu'à minorer $P_1(x)$ sur B_0 par une constante C_1 qui ne dépende que de n.

$$\begin{aligned}\int_{B_0} |f_{s,x}(v) - f_{s,x_{B_0}}| \frac{d\beta(v)}{c_n} &\leqslant \int_{B_0} |f_{s,x}(v) - f_{s,x} * P_1(0)| \frac{P_1(v)}{c_n}\, d\beta(v)\\ &\quad + \int_{B_0} |f_{s,x_{B_0}} - f_{s,x} * P_1(0)| \frac{d\beta(v)}{c_n}\end{aligned}$$

et chacun des deux morceaux du membre de droite est majoré par CC_1^{-1}.

Remarque 1. Cette caractérisation des fonctions à oscillation moyenne bornée était déjà connue dans le cadre de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ par Gundy (voir l'introduction de [14]) et reprise par Meyer dans [23].

Remarque 2. On a vu que dans H^p, $2 \leqslant p < +\infty$, $\|F\|_p \approx \|G(F)\|_p$ et il en est de même pour B.M.O. On peut donc caractériser les fonctions harmoniques dans D par le défaut d'harmonicité de leur carré.

Remarque 3. On relie alors aisément les fonctions B.M.O. à la diffusion $X_\omega(t)$ sur D associées aux tribus $\mathscr{B}_t$. Si f est une fonction B.M.O. et F son prolongement harmonique alors la martingale $Y_t(w) = F(X_\omega(t)) - F(X_\omega(0))$ est une martingale B.M.O. pour toute mesure initiale P_z $(z \in D)$ puisque si $\langle Y, Y\rangle$ est le processus croissant associé à f on a

$$\begin{aligned}&E_z[\langle Y, Y\rangle \infty - \langle Y, Y\rangle t | \mathscr{B}_t]\\ &\qquad = E_{X_\omega(t)}\left[\int_t^{+\infty} \|\nabla F(X_\omega(s))\|^2\, ds\right] \leqslant \|G^2(F)\|_{L^\infty(D)} \leqslant C^2.\end{aligned}$$

Réciproquement si f étant donnée telle que $|f| * P_1(0) < +\infty$ et si $Y_t(\omega)$ est une martingale B.M.O. pour une mesure intiale P_Z alors f est B.M.O. En effet $G^2(F)(X_\omega(t))$ est bornée, comme la mesure de Green est absolument continue par rapport à la mesure de volume de D. $G^2(F)$ est bornée presque partout $d\omega$, donc partout par semi continuité inférieure. C'est cette caractérisation probabiliste de B.M.O. qui avait amené la remarque de Gundy.

Nous allons mentionner quelques conséquences de cette caractérisation de B.M.O.

COROLLAIRE 2.1. *Soit f dans B.M.O., alors $f * P_s(\cdot)$ est dans B.M.O. pour tout $s > 0$ et il existe $c > 0$, ne dépendant que de n, telle que*

$$\|f * P_s\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant C\,\|f\|_{\text{B.M.O.}}.$$

Démonstration. On remarque déjà, bien que P_s ne soit pas un semi groupe, que $F_s(x, r) = (f * P_s) * P_r(x)$ est fini pour tout $s > 0$, tout $r > 0$ et tout $x \in N$ (il suffit d'estimer le produit de convolution $P_s * P_r(x)$). Maintenant l'application f donne $G(f) = G(F)$ est sous additive et P_s une mesure de probabilité d'où comme au chapitre III lemme 2.3 on a $G(f * P_s) \leqslant G(f)$ et le résultat par application du théorème 6.

LEMME 2.2. *Soit f dans B.M.O. et $F(x, t) = f * P_s(x)$ son prolongement harmonique à D alors il existe C et C' ne dépendant que de n telles que*

$$\sup_{x\in N} \int_0^r \int_{B_r(x)} \|\nabla F(v, s)\|^2\, d\beta(v)\, \frac{ds}{s} \leqslant C\,\|f\|^2_{\text{B.M.O.}}\, r^n$$

et

$$\sup_{x\in N} \int_{B_r(x)} (A(F, a, r)(v))^2\, d\beta(v) \leqslant C'\,\|f\|^2_{\text{B.M.O.}}\, r^n.$$

Démonstration. Le théorème 6 et une minoration de la fonction de Green

$$C_1\,\|f\|^2_{\text{B.M.O.}} \geqslant \sup_{\substack{y>0\\ x\in N}} \int_D G((0, y), (x^{-1}\cdot v, s))\,\|\nabla F(v, s)\|^2\, d\omega(v, s)$$

$$C_1\,\|f\|^2_{\text{B.M.O.}} \geqslant \int_D G((0, y), (u, s))\,\|\nabla F(xv, s)\|^2\, d\omega(v, s)$$

$$> \int_{B_r} G((0, y), (u, s))\,\|\nabla F(xv, s)\|^2\, d\omega(v).$$

On minore, comme au théorème 4, la fonction de Green: ici $0 < s \leqslant r$, $y = Cr$ avec C très grand par exemple 10^{100}, d'où $\lambda > 1/2$

$$G((0, y), (u, s) \geqslant \tfrac{1}{2}(4ys[(s + y + \|z\|^2)^2 + b^2 - 4ys]^{-1})^n,$$

où $u = (b, z)$ ($b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$). Pour $u \in B_r(0)$ on a donc la minoration

$$G((0, y), (u, s)) \geqslant 1/2(4ysC^{-1}r^{-2})^n \geqslant Cs^n r^{-n}$$

et

$$\begin{aligned} Cr^{-n} &\int_0^r \int_{B_r(0)} s^n \| \nabla F(xu, s)\|^2 \, d\omega(u, s) \\ &= Cr^{-n} \int_0^r \int_{B_r(x)} \| \nabla F(x, s)\|^2 \, d\beta(x) \frac{ds}{s} \leqslant C_1 \|f\|^2_{\text{B.M.O.}} \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(x)} (A(F, a, r)(v))^2 \, d\beta(v) \\ &\qquad = \int_{B_r(x)} d\beta(v) \int_0^r \frac{ds}{s^{n+1}} \int_{|v^{-1} \cdot u|_1 < as} \| \nabla F(u, s)\|^2 \, d\beta(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(x)} (A(F, a, r)(v))^2 \, d\beta(v) \\ &\qquad = \int_{|v|_1 < as} d\beta(v) \int_0^r \frac{ds}{s^{n+2}} \int_{B_r(xv^{-1})} \| \nabla F(u, s)\|^2 \, d\beta(u). \end{aligned}$$

Mais pour $|v|_1 < ar$, $B_r(xv^{-1}) \subset B_{2(a+1)r}(x)$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} (A(F, a, r)(v))^2 \, d\beta(v) &< C_n a^n \int_0^r \frac{ds}{s} \int_{B_{2(a+1)r}} \| \nabla F(u, s)\|^2 \, d\beta(u) \\ &< C_n C a^n (2(1 + a))^n \, r^n \, \|f\|^2_{\text{B.M.O.}}. \end{aligned}$$

Remarque. Nous avons ici deux mesures de Carleson sur N [32].

COROLLAIRE 2.3. *Soit F dans H^1 et g dans B.M.O. avec $G(x, s) = g * P_s(x)$ alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de a et n telle que*

$$\int_N \int_0^{+\infty} | \nabla F(x, s) \cdot \nabla G(x, s)| \, d\beta(x) \frac{ds}{s} \leqslant C \, \|N(F, a)\|_1 \cdot \|g\|_{\text{B.M.O.}}.$$

Démonstration. On procède comme dans [9] et on pose $A_r(x) = A(G, a, r)(x)$ on a déjà d'après le lemme 2.2 $\int_{B_r(x)} A_r^2(x)\, d\beta(x) \leqslant C \| g\|^2_{\text{B.M.O.}}\, r^n$ soit $r(v) = \sup\{r \geqslant 0;\ A_r(v) \leqslant 10C^{1/2} \| g \|_{\text{B.M.O.}}\}$

$$B_r(x) = \{v \in B_r(x);\ r(v) > r\} \cup \{v \in B_r(x)\ r(v) \leqslant r\} = B \cup A$$

$$\int_B A_r^2(v)\, d\beta(v) + \int_A A_r^2(v)\, d\beta(v) \leqslant C \| g\|^2_{\text{B.M.O.}}\, r^n$$

si $v \in A$ $A_r(v) \geqslant 10C^{1/2} \| g\|_{\text{B.M.O.}}$ et $Cr^n \| g\|^2_{\text{B.M.O.}} \geqslant \int_A A_r^2(v)\, d\beta(v) \geqslant \beta(A)\, 10^2 C \| g\|_{\text{B.M.O.}}$ et $\beta(A) \leqslant 10^{-2} r^n$, $\beta(A) + \beta(B) = C_n r^n$ et $\beta(B) \geqslant (C_n - 10^{-2})\, r^n = C_1 r^n$ puis en appelant I_r le membre de gauche de l'égalité suivante

$$\int_N \int_0^{r(v)} \int_{B_{as}(v)} | VF(x, s) \cdot VG(x, s)|\, d\beta(x) \frac{ds}{s^{n+1}}\, d\beta(v)$$

$$= \int_N \int_0^{+\infty} | VF(x, s) \cdot VG(x, s)|\, \beta\{v \in B(x), s < r(x)\}\, d\beta(x) \frac{ds}{s^{n+1}}$$

$$I_r \leqslant C_1 \int_N \int_0^{+\infty} | VF(x, s) \cdot VG(x, s)|\, d\beta(x) \frac{ds}{s}$$

$$I_r \leqslant \int_N \left(\int_{\Gamma_{a,r(v)}(v)} \| VF(x, s)\|^2\, d\omega(x, s) \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int_{\Gamma_{a,r(v)}(v)} \| VG(x, s)\|^2\, d\omega(x, s) \right)^{1/2} d\beta(v)$$

$$I_r \leqslant \int_A A(F, a)(v)\, A(G, a, r(v))\, d\beta(v).$$

Comme $A(G, a, r(v)) \leqslant 10C^{1/2} \| g\|_{\text{B.M.O.}}$ et que d'après le théorème 2 $\|F\|_1^A \leqslant C \|N(f, a)\|_1$ on obtient le résultat annoncé.

Remarque. On pouvait aussi démontrer ce corollaire en utilisant la caractérisation probabiliste de H^1.

On peut aussi étudier la croissance des fonctions B.M.O.

LEMME 2.4. *$\int_{N - B_1(0)} d\beta(x)/|x|_2^\beta < +\infty$ si et seulement si $\beta > n$.*

Démonstration immédiate en intégrant en premier lieu sur le centre de N.

La démonstration du théorème 6 nous montre que si f est dans B.M.O. alors $\int_N |f(x)|\, P_1(x)\, d\beta(x) < +\infty$. Comme $P_1(x)$ est fortement intégrable sur N puisque $P_1(x) \leqslant C\, |x|_2^{-2n}$ on peut obtenir un meilleur comportement de f à l'infini.

LEMME 2.5. *Soit f dans B.M.O., alors il existe une constante C_α ne dépendant que de α et n telle que pour tout $\alpha > 0$*

$$\int_N \frac{|f(x)|\, d\beta(x)}{1 + |x|_2^{n+\alpha}} \leqslant C_\alpha(\|f\|_{\text{B.M.O.}} + |f_{B_0}|).$$

Démonstration. Comme au théorème 6 avec $\lambda = 1$, sur $N - B_k$ $1 + |x|_\alpha^{n+\alpha} \geqslant 2^{k(n+\alpha)}$ et $\sum_{k=0}^\infty 2^{-k\alpha}(C_1 + k\, 2^n) < +\infty$, la suite étant alors facile.

3. *Formule de Green à l'infini*

Le corollaire 2.3 nous montre qu'une fonction g dans B.M.O. définit une forme linéaire continue sur H^1. On va étudier, dans ce paragraphe, dans quels cas elle coincide avec la forme linéaire sur le bord: $f \to \int f(x)\, g(x)\, d\beta(x)$.

On remarque que si F est dans H^1, alors d'après la caractérisation probabiliste de H^1 (théorème 1 de [5], $F(X_\omega(t)$ est une martingale uniformément intégrable et $\lim_{t\to\infty} F(X_\omega(t)) = F(X_\omega(\infty))$ existe et est égale presque partout à une fonction f sur N et on a $F(x, s) = f * P_s(x)$. De même si h est dans B.M.O. et H est son prolongement harmonique d'après la remarque 3 du paragraphe 2 $H(X_\omega(\infty)) = h$ presque partout sur N. Le résultat est encore vrai pour f mesurable sur N telle que $f \cdot P_1^{-1}$ soit borné puisque dans ce cas $f \in L^2(N, d\beta)$.

LEMME 3.1. *Si f et h sont dans $L^2(N, d\beta)$, ou si f mesurable sur N est telle que $\int f(x)\, d\beta(x) = 0$ et $f \cdot P_1^{-1}$ est bornée et si h est dans B.M.O. alors*

$$\int_N f(x)\, h(x)\, d\beta(x) = C \int_N \int_0^{+\infty} V(f * P_s(x)) \cdot V(h * P_s(x))\, d\beta(x).$$

Démonstration. Le cas f et h dans $L^2(N, d\beta)$ est pratiquement contenu dans la proposition 4.4 du chapitre IV. On regarde donc le deuxième cas et on applique la formule d'Ito au processus $F(X_\omega(t))\, H(X_\omega(t))$ en tenant compte du fait que $\Delta(FH) = H \Delta F + F \Delta H + 2VF \cdot VH$ (le produit scalaire étant entendu pour la métrique de D). Cela donne en prenant l'espérance de mesure initiale β_Y

$$E^{\beta_Y}[F(X_\omega(t)\, H(X_\omega(t))]$$
$$= \int_N F(x, Y)\, H(x, Y)\, d\beta(x) + E^{\beta_Y}\left(\int_0^t VF(X_\omega(s)) \cdot VH(X_\omega(s)\, ds\right).$$

Comme on a vu que $F(X_\omega(\infty))\,G(X_\omega(\infty))=f\cdot g$ presque partout on a d'après le lemme 1.4.III de [5] pour $t=+\infty$

$$\int_N f(x)\,h(x)\,d\beta(x)=\int_N F(x,Y)\,H(x,Y)\,d\beta(x)$$

$$+\int_N\left(\int_D G((x,Y),z)\,\nabla F(z)\cdot\nabla H(z)\,d\omega(z)\right)d\beta(x).$$

On remarque alors que

$$\int_N F(x,Y)\,H(x,Y)\,d\beta(x)=\int_N f*P_Y(x)\,h*P_Y(x)\,d\beta(x)$$

$$=\int_N f*P_Y*P_Y(x)\,h(x)\,d\beta(x).$$

Mais comme F est dans H^2 d'après le lemme 1.2 du chapitre III

$$|F(x,Y)|\leqslant CY^{-n/2}\qquad\text{et}\qquad |f*P_Y*P_Y(x)\,h(x)|\leqslant CY^{-n/2}\,|h(x)|.$$

De plus comme on le verra au paragraphe suivant $|F(x,Y)|\leqslant C(1+|x|^{n+1/2})^{-1}$ de sorte que d'après le lemme 2.5 et le corollaire 2.1, en remarquant que $|h*P_{Y_{B_0}}|\leqslant C\,|h_{B_0}|$ où C ne dépend pas de Y, on obtient avec une constante C' ne dépendant pas non plus de Y

$$\int_N F(x,Y)\,H(x,Y)\,d\beta(x)\leqslant C'$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{Y\to\infty}\int_N F(x,Y)\,H(x,Y)\,d\beta(x)=0.$$

Comme toujours par le lemme 2.5 $\int f(x)\,h(x)\,d\beta(x)<+\infty$ et par le lemme 4.3 du chapitre IV

$$\int_N G((x,Y),(v,s))\,d\beta(x)=C_n\min(s^n,Y^n),$$

on obtient le résultat pour $Y=+\infty$ par convergence dominée une fois de plus en utilisant le corollaire 2.3.

4. *Etude de H^1 et démonstration du théorème 7*

Nous allons déterminer un ensemble de fonctions élémentaires dense dans H^1. Cela a été effectué dans le cadre de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+$ dans [28] en utilisant les transformées de Riesz. On s'inspirera de [23] où on fournit une démonstration évitant les transformées de Riesz en utilisant la caracterisation probabiliste de H^1 et le théorème de dualité H^1 B.M.O. dans le cadre des martingales continues [14]. Certaines démonstrations sont reprises de [23] et adaptées à notre situation.

LEMME 4.1. *Soit F dans H^1 et f sa valeur au bord alors pour tout $s > 0$*

$$\int_N f(x)\, d\beta(x) = \int_N F(x, s)\, d\beta(x) = 0.$$

Démonstration. On sait que f existe et que $f = F(X_\omega(\infty))$ presque partout. On applique encore une fois la formule d'Ito, avec $t = +\infty$, à $F(X_\omega(t))$ avec pour mesure initiale β_s ce qui donne

$$\int_N f(x)\, d\beta(x) = \int_N F(x, s)\, d\beta(x).$$

Comme f est dans H^1 on a $|F| \leqslant N(F, a)$ et $N(F, a)$ est dans $L^1(N)$. De plus par le lemme 1.2 du chapitre III $F(x, s) \leqslant cs^{-n}$. On obtient le résultat par convergence dominée lorsque $s \to +\infty$.

LEMME 4.2. *Soit f mesurable sur N telle que $\int_N f(x)\, d\beta(x) = 0$ et ou bien f est à support dans une boule de Koranyi et bornée ou bien fP_1^{-1} est bornée alors F $(F(x, s) = f * P_s(x))$ est dans H^1.*

Démonstration. On ne verra que le premier cas. Pour le second il suffit de tronquer et d'utiliser la décroissance de f pour se ramener au premier cas ou encore de travailler en couronnes successives comme au théorème 6. On suppose que f est bornée par C sur la boule de Koranyi $B_R(x)$. Par action de N on peut déjà supposer $x = 0$; par action de S on se ramène à la boule unité. Si $f_R(x) = f(R \cdot x)$ on a de suite par examen du noyau de Poisson

$$f_R * P_s(x) = F_R(x, s) = F(R \cdot X, R \cdot s)$$

et

$$\int_N N(F_R, a)(x)\, d\beta(x) = R^{-n} \int_N N(F, a)(x)\, d\beta(x)$$

et de plus la norme de F dans H^1 ne dépend que de CR^n. On suppose donc que f est bornée par C sur $B_1(0)$ et d'après le lemme 2.1, II de [5] on supposera aussi que $a = 1$. On utilisera ici la jauge $|\cdot|_2$ et même $|\cdot|_2^{1/2}$ pour utiliser l'inégalité de Cygan [4] qui simplifiera les calculs. On a déjà

$$|F(x, s)| \leqslant C \quad \text{et} \quad \|N(F)\|_\infty \leqslant C \quad \text{et} \quad \int_{B_{16k^2}(0)} N(F)(x)\, d\beta(x) \leqslant C_n 16^n k^2.$$

Il suffit donc d'estimer $N(F)(x)$ pour $|x|_2 \geqslant 16k^2$, où $k > 1$ sera fixé par la suite

$$F(g, s) = \int_{B_1(0)} f(x) P_s(g^{-1} \cdot x)\, d\beta(x)$$

$|g^{-1} \cdot x|_2^{1/2} \geqslant |g|_2^{1/2}$ et si $|x|_2 \geqslant 4$ et $|x|_2 \leqslant 1 < |g|_2/4$ on a $|g^{-1} \cdot x|_2 \geqslant |g|_2/4$.

(1) Soit pour $|g|_2 \geqslant 4$ $F(g, s) \leqslant CC_n\, 2^{4n} s^n\, |g|_2^{-2n}$.

(2) Estimée de $F(g, s)$ pour $(g, s) \in \Gamma_1(x)$ avec $|x|_2 \geqslant 16$ et $s \leqslant 1$.

On a $|x^{-1} \cdot g|_2 < s \leqslant 1$ d'où $|g|_2 \geqslant 9$ et $|g|_2 \geqslant 9/16\, |x|_2$; d'où par (1)

$$F(g, s) \leqslant CC_n \frac{16^n}{9^n} |x|_2^{-2n}.$$

Pour $s \to +\infty$ il faut faire intervenir le fait que f est d'intégrale nulle et on estime d'abord le gradient de P_s sur l'horosphère Λ_1 pour sa métrique. Notons le V_1 et posons $g = (u, z)$, $\|z\|^2 = \sum_{k=2}^n |z_k|^2$ et avec $Z_k = X_k + iY_k$, où X_k et Y_k, $2 \leqslant k \leqslant n$, sont les champs invariants à gauche définis au début de l'article on a d'après le lemme 1.1 du chapitre I

$$\|V_1 P_s\|^2 = \sum_2^n |Z_k P_s|^2 + \left| \frac{\partial P_s}{\partial u} \right|^2,$$

$$Z_k P_s(g) = \frac{-2ns^n \bar{z}_k (s + \|z\|^2 + iu)}{(u^2 + (s + \|z\|^2)^2)^{n+1}},$$

comme $2s^{1/2}\, |z_k|\, ((s + \|z\|^2)^2 + u^2)^{1/2} \leqslant u^2 + (s + \|z\|^2)^2$ on a $|Z_k P_s(g)| \leqslant (2/s)^{1/2} P_s(g)$ de même $|\partial P_s(g)/\partial u| \leqslant (n/s)\, P_s(g)$ et $\|V_1 P_s(g)\| \leqslant n/s^{1/2}\, (n-2)\, 2^{1/2} + 1/s^{1/2})\, P_s(g)$ de sorte que pour s tendant vers l'infini l'estimée sera meilleure. Maintenant comme f est d'intégrale nulle

$$F(g, s) = \int_{B_1(0)} (P_s(x^{-1} \cdot g) - P_s(g))\, F(x)\, d\beta(x).$$

Par le théorème des accroissements finis sur l'horosphère Λ_1 en notant par d la distance géodésique et par $B(g, r)$ une boule géodésique de centre g et rayon r on a

$$|P_s(x^{-1} \cdot g) - P_s(g)| \leqslant d(0, x) \sup_{Y \in B(g, d(0,x))} \|V_1 P_s(Y)\|.$$

Compte tenu du fait que $|x|_2 \leqslant 1$ et du calcul des géodésiques du chapitre I on a $d(0,x) \leqslant 3$. On peut donc trouver $k \geqslant 1$ ne dépendant que de la géométrie des horosphères tel que

$$B(g, d(0,x)) = g \cdot B(0, d(0,x)) \subset g \cdot B(0,3) \subset g \cdot B_{k^2}(0),$$

où ici $B_{k^2}(0)$ est une boule de Koranyi de rayon k^2.

Supposons $|g|_2 \geqslant 4k^2$ d'où $|Y^{-1} \cdot g|_2 \leqslant |g|_2/4$ et par l'inégalité de Cygan $|g|_2 \leqslant 4|Y|_2$ ce qui donne en utilisant la majoration de $\|V_1 P_s\|$ pous $s \geqslant 1$ en posant $C_1 = 32^8 n[(n-2)\,2^{1/2}+1]$.

(3) $|g|_2 \geqslant 4k^2$, $|Y^{-1} \cdot g|_2 \leqslant k^2$ et $s \geqslant 1 \Rightarrow |P_s(x^{-1} \cdot g) - P_s(g)| \leqslant C_1 s^{n-1/2}/(|g|_2^2 + s^2)^n$ d'où

(4) si $|g|_2 \geqslant 4k^2$ et $s \geqslant 1$ $|F(g,s)| \leqslant CC_1 s^{n-1/2}/(|g|_2^2+s^2)^n$.

(5) Estimée pour $(g,s) \in \Gamma_1(x)$ $|g|_2 \geqslant 4k^2$ et $s \geqslant 1$.

On a $|g^{-1} \cdot x|_2 \leqslant s$ d'où par un petit calcul à l'aide de l'inégalité de Cygan $|x|_2^2 \leqslant 15(|g|_2^2 + s^2)$ et finalement avec (4)

$$F(g,s) \leqslant 15^{n+1/2} CC_1 |x|_2^{-(n+1/2)}.$$

(6) Estimée pour $(g,s) \in \Gamma_1(x)$ $|g|_2 \leqslant 4k^2$, $s \geqslant 1$ *et* $|x| \geqslant 16k^2$.

On a $|g|_2 \leqslant |x|_2/4$, $|g^{-1} \cdot x| < s$, d'où $|x|_2/4 < s$.

Comme $F(g,s) = \int_{B_1(0)} (P_s(v^{-1} \cdot g) - P_s(0)) f(v)\, d\beta(v)$ on utilise encore l'estimée

$$|P_s(v^{-1} \cdot g) - P_s(0)| \leqslant d(0, v^{-1} \cdot g)\, C_1 s^{-1/2} P_s(0)$$

comme $|v|_2 \leqslant 1$ $|g|_2 \leqslant 4k^2$ on a $d(0, v^{-1} \cdot g) < 3(2+8k^2)$ et

$$|F(g,s)| \leqslant 3C(2+8k^2)\, s^{-(n+1/2)} \leqslant 3C\, 4^{n+1/2}(2+8k^2)\, |x|_2^{-(n+1/2)}$$

D'où dans tous les cas $N(F)(x) \leqslant C' |x|_2^{-(n+1/2)}$ et $N(F) \in L^1(N)$ d'après le lemme 2.4. De plus si F est à support dans $B_r(0)$ on aura $N(F)(x) \leqslant C' R^n |x|_2^{-(n+1/2)}$.

PROPOSITION 4.3. *Soit F dans H^1 et f sa valeur au bord. Il existe une constante C indépendante de F telle que*

$$\|F\|_1 \leqslant C \sup_{g \in \mathscr{F}} \int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x),$$

où $\mathscr{F} = \{ g \in \text{B.M.O.}, \|g\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant 1, g \cdot P_1^{-1} < +\infty \}$.

Démonstration. On sait par le théorème 1 de [5] que $\sup_{s>0} E^{\beta_s}[F^*] = \|F\|_1^*$, où $F^*(\omega) = \sup_{t>0} |F(X_\omega(t))|$, définit une norme équivalente à celle définie par $\|F\|_1 = \|N(F, a)\|_{L^1(N)}$. On sait aussi par [5, p. 327] que $\varphi(s) = E^{\beta_s}[F^*]$ est une fonction croissante. Soit F dans H^1 telle que $\|F\|_1 \neq 0$, sans quoi c'est terminé, il existe $s_0 > 0$ tel que $\|F\|_1^* < 2E^{\beta_{s0}}[F^*] < +\infty$.

On considère alors la martingale $F(X_\omega(t)) = Z(t)$ qui appartient à $H^1(\beta_{s_0})$ ($H^1(\beta_{s_0})$ est l'ensemble des martingales $M(t)$, continues sauf en 0, relativement aux tribus $\mathscr{B}_t$ de la diffusion $X_\omega(t)$ de D avec mesure initiale β sur l'horosphère Λ_{s_0} telles que $E^{\beta_{s0}}[M^*] = \|M\|^* < +\infty$). On tronque alors cette martingale dès qu'elle devient plus grande que le noyau de Poisson par le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t > 0; |Z_t - Z_0| > kP_1(X_\omega(0))\} = T(k)$$

et on pose $Z_t^T = Z_{t\wedge T}$ qui est encore une martingale de $H^1(\beta_{s_0})$ dont la norme est dominée par celle de Z_t. On fixe donc k assez grand pour que

$$\|F\|_1^* < 2E^{\beta_{s0}}[(Z^T)^*] < 2E^{\beta_{s0}}[F^*].$$

On applique alors la proposition 3.9 de [14], qui est la version probabiliste de la proposition que l'on veut démontrer, à la martingale Z_t^R

$$\|Z^T\|^* \leqslant C_1 \sup\{E^{\beta_{s0}}\langle Z^T, T\rangle_\infty : Y \text{ B.M.O.}, \|Y\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant 1\},$$

où $\langle Z^T, Y\rangle_t$ est le processus croissant associé au processus $Z^T(t)\,Y(t)$, où Y_t est une martingale B.M.O. pour les tribus du mouvement brownien de D et la mesure initiale β_{s_0} et C_1 ne dépend pas de Z. Il ne faut pas oublier le saut de la martingale à l'origine, de plus la proposition n'est établie que pour une mesure initiale finie mais se généralise facilement au cas de β_{s_0}. Cette proposition est élémentaire et beaucoup plus facile que le théorème de dualité H^1 B.M.O. probabiliste qui demande une extension de l'espace de probabilité. On choisit alors Y_t telle que

$$\|F\|_1^* < 2C_1 E^{\beta_{s0}}\langle Z^T, Y\rangle_\infty = 2C_1 E^{\beta_{s0}}\left[Z_0 Y_0 + \int_{0+}^T d\langle Z, Y\rangle_s\right]$$

On tronque aussi la martingale Y_t dès qu'elle dépasse le noyau de Poisson par un temps d'arrêt $T'(k')$ et toujours par convergence dominée pour k' assez grand et fixé avec $Y_t' = Y_t^{T'} - Y_0$

$$\|F\|_1^* < 2C_1 E\beta_{s0} \quad \left[Z_0 Y_0 + \int_{0+}^T d\langle Z, Y'\rangle_s\right].$$

On a aussi Y' étant bornée

$$E^{\beta_{s0}}\left[\int_{0+}^T d\langle Z, Y'\rangle_s\right] = E^{\beta_{s0}}[Z_T Y_T'] = E^{\beta_{s0}}[Y_T' Z_\infty]$$

puisque

$$E^{\beta_{s0}}[Y'_T(Z_\infty - Z_T)] = E^{\beta_{s0}}[E[Y'_T(Z_\infty - Z_R)|\mathscr{B}_T]$$
$$= E^{\beta_{s0}}[Y'_T E(Z_\infty - Z_T)|\mathscr{B}_T]] = 0$$

car $Z(t)$ est une intégrale stochastique. Cela nous donne

$$\|F\|_1^* < 2C_1 E^{\beta_{s0}}[Y_0 Z_0 + Y'_T Z_\infty].$$

On définit alors les fonctions h et l sur N par $h(x_\omega(0)) = Y_0(X_\omega(0))$ où $X_\omega(0) = (x_\omega(0), s_0)$, h est $\mathscr{B}_0$ mesurable et bornée par 1 du fait que $\|Y\|_{\mathrm{B.M.O.}} \leqslant 1$ $l(x_\omega(\infty)) = E^{\beta_{s0}}[Y'_T|X_\infty]$ (on sait par [5] que le temps de vie de la diffusion est infini et que $X_\infty \in \partial D$). On a

$$E^{\beta_{s0}}[Y_0 Z_0] = \int_N F(x, s_0)\, h(x)\, d\beta(x) = \int_N F(x)\, h * P_{s_0}(x)\, d\beta(x)$$

et par le lemme 1.4 de [5]

$$E^{\beta_{s0}}[Y'_T Z_\infty] = E^{\beta_{s0}}[F(X_\omega(\infty))\, E^{\beta_{s0}}[Y'_T|X_\infty]] = \int_N f(x)\, l(x)\, d\beta(x)$$

et avec une boule B de Koranyi assez grande

$$\|F\|_1^* < 2C_1 \int_N (h * P_{s_0} \cdot 1_B(x) + l(x))\, f(x)\, d\beta(x).$$

Il reste donc à montrer que $g = h * P_{s_0} \cdot 1_B + l$ est dans $\mathscr{F}$.

(a) La condition de croissance: comme $|h * {}_{s_0}| \leqslant |h| < 1$ c'est terminé pour $h * P_{s_0} \cdot 1_B$.

$|l(X_\infty)|$ étant majorée par $k' P_1(X_0)$ il suffit d'estimer $E^{\beta_{s0}}[P_1(X_0)|X_\infty]$. Pour cela soir $m \geqslant 0$ mesurable sur N. On a alors compte tenu des lemmes 1.2 et 1.4 de [5]

$$E^{\beta_{s0}}[m(X_\infty)\, P_1(X_0)] = \int_N E_{(x,s_0)}\, m(X_\infty)\, P_1(x)\, d\beta(x)$$
$$= \int_N m * P_{s_0}(x)\, P_1(x)\, d\beta(x)$$
$$= \int_N m(x)\, P_1 * P_{s_0}(x)\, d\beta(x),$$

d'où $E^{\beta_{s0}}[P_1(X_0)|X_\infty] = P_1 * P_{s_0}(x_\omega(\infty))$ presque sûrement.

On vérifie alors aisément que $P_1 * P_{s_0}$ a la croissance voulue en écrivant

$$P_1 * P_{s_0}(x) = \int_{B(0,1/2|x|_2)} P_1(v)\, P_{s_0}(v^{-1}x)\, d\beta(v)$$

$$+ \int_{N - B(0,1/2|x|_2)} P_1(v)\, P_{s_0}(v^{-1} \cdot x)\, d\beta(x)$$

et en majorant P_{s_0} dans la première intégrale et P_1 dans la seconde.

(b) Estimée de la norme B.M.O. de g

$$\|h * P_0\, 1_B\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant 1 \quad \text{car} \quad \|h\|_\infty \leqslant 1.$$

Pour estimer la norme B.M.O. de l on utilise une remarque due à Herz qui permet de caractériser la norme B.M.O. au moyen de fonctions particulières de H^1. j étant une fonction localement intégrable sur N et B une boule de Koranyi de rayon R.

$$\frac{1}{|B|} \int |j(x) - j_B|\, d\beta(x) = \sup_{|m| \leqslant 1_B} \frac{1}{|B|} \int_N (j(x) - j_B)\, m(x)\, d\beta(x)$$

$$= \sup_{|m| \leqslant 1_B} \frac{1}{|B|} \int_N j(x)(m(x) - m_B)\, d\beta(x)$$

$q(x) = 1/|B|\,(m(x) - m_Q)$ est une fonction à support dans B d'intégrale nulle et majorée par $2/|B| = 2/c_n R^n$ appelée un $(2, B)$ atome, d'où

$$\frac{1}{|B|} \int |j(x) - j_B|\, d\beta(x) \leqslant \sup_{q \in (2,B)\text{atome}} \int j(x)\, q(x)\, d\beta(x).$$

Soit alors q un $(1, B)$ atome et on va majorer uniformément $\int_N l(x)\, q(x)\, d\beta(x)$. On remarque d'après le lemme 4.2 que $Q(x, s) = q * P_s(x)$ est dans H^1 avec une norme indépendante de R. On considère alors la martingale $Q_t = Q(X_\omega(t))$ qui d'après le théorème 1 de [5] est dans $H^1(\beta_{s_0})$. Partant de la définition de l et utilisant le lemme 1.4 de [5] et tenant compte du fait que $\|Y'\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant 1$, $Y'_0 = 0$, $|Y'| < k'P_1(X_0)$ on obtient

$$\int_N l(x)\, q(x)\, d\beta(x) = E^{\beta_{s0}}[l(X_\infty)\, q(X_\infty)] = E^{\beta_{s0}}[q(X_\infty)\, Y'_T]$$

$$= E^{\beta_{s0}}[Q_\infty Y'_\infty]$$

On utilise alors la version probabiliste de l'inégalité du corollaire 2.3 donnée par le théorème 3.5 de [14] d'où

$$\int_N l(x)\, q(x)\, d\beta(x) \leqslant C\, \|Q\|_1^*\, \|Y'\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant C\, \|Q\|_1^*$$

où C ne dépend ni de Q ni de Y'. Et avec une autre constante $C' \|l\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant C'$ ceci nous permet de déterminer un espace de Hilbert contenu dans H^1 sur lequel la dualité s'exprime simplement.

COROLLAIRE 4.4. *Soit* $f \in L^2(N, P_1^{-1}\, d\beta)$ *et* $\int_N f(x)\, d\beta(x) = 0$ *alors* $F \in H^1$ $(F(x, s) = f * P_s(x))$.

Démonstration. Soit $g \in \mathscr{F}$.

$$\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)$$

$$= \int_N f(x)(g(x) - g * P_1(0))\, d\beta(x)$$

$$\leqslant \left(\int_N f^2(x)\, P_1^{-1}(x)\, d\beta(x)\right)^{1/2} ((g - g * P_1(0))^2 * P_1(0))^{1/2},$$

d'où par le théorème 6 avec une constante C universelle.

$$\int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x) \leqslant C\, \|f\|_{L^2(N, P_1^{-1}\, d\beta)}\, \|g\|_{\text{B.M.O.}}$$

et le résultat par la proposition 4.3.

Démonstration du théorème 7. Soit $F \in H^1$, $F(X_\omega(t)) = Z(t)$ la martingale correspondante et $Z'_t = Z_t - Z_0$. On a encore

$$E^{\beta_s}[(Z - Z')^*] = E^{\beta_s}[|Z_0|] = \int_N |f * P_s(x)|\, d\beta(x).$$

Il résulte du fait que $F \in H_1$ $N(F, a) \in L^1$ et

$$|f * P_s(x)| \leqslant \frac{c}{s^n}, \qquad \text{que} \quad \lim_{s \to \infty} \int_N |f * P_s(x)|\, d\beta(x) = 0.$$

On fixe alors s_0 pour que cette intégrale soit plus petite que ε.

On coupe encore la martingale dès qu'elle domine le noyau de Poisson par

$$T = \{\inf t : |Z'_t| \geqslant k P_1(X_0)\}$$

et on pose $Z'^T_t = Z'_{t \wedge T}$. Lorsque $k \to \infty$ $T \to \infty$, d'où encore par convergence dominée $(\|Z' - Z'^T\|_1^* < 2\|F\|_1^*)$ il existe $k > 0$ fixé tel que $E^{\beta_{s_0}}[(Z' - Z'^T)^*] \leqslant \varepsilon$, d'où $E^{\beta_{s_0}}[(Z - Z'^T)^*] \leqslant 2\varepsilon$.

On définit alors comme précédemment une fonction l sur N par $l(X_\infty) = E^{\beta_{s_0}}[Z'^T_\infty | X_\infty]$. Z'^T_∞ est $P_{\beta_{s_0}}$ intégrable par construction et d'intégrale nulle (espérance d'une intégrale stochastique) et bornée par $k'P_1(X_0)$, d'où comme pour la proposition 4.3 l est dans H_0^1, puisque majorée par $k'P_1 * P_s(x)$. Il reste à évaluer la norme de $f - l$ dans H^1 en utilisant la proposition 4.3. Pour cela soit $q \in \mathscr{F}$ et $Q(x, s) = q * P_s(x)$ et la martingale $Q_t = Q(X_\omega(t))$ toujours par le lemme 1.4 de [5] on a

$$\int (f(x) - l(x))\, q(x)\, d\beta(x) = E^{\beta_{s0}}[q(X_\infty)(f(X_\infty)(f(X_\infty) - l(X_\infty))]$$
$$= E^{\beta_{s0}}[q(X_\infty)(Z_\infty - Z'^T_\infty)].$$

On utilise une fois encore le théorème 3.5 de [14] sans problèmes car Q_t est bornée.

$$\int (f(x) - l(x))\, q(x)\, d\beta(x) \leqslant CE^{\beta_{s0}}[(Z - Z'^T)^*]\, \|Q_t\|_{\text{B.M.O.}} \leqslant 2C\varepsilon.$$

Remarque. Ce théorème est a rapprocher du résultat de Garnett et Latter sur la décomposition atomique de H^1 dans le cas de la boule de C^n [12].

5. *Démonstration du théorème* 8

Soit φ une forme linéaire continue sur H^1 d'après le corollaire 4.4 elle induit une forme linéaire sur $L^2(N, P_1^{-1}\, d\beta)$. Il existe une fonction $g \in L^2(N, P_1^{-1}\, d\beta)$ telle que pour toute fonction f dans $L^2(N, P_1^{-1}\, d\beta)$ $\varphi(f) = \int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)$. Comme les fonctions d'intégrale nulle, bornée et à support compact sont dans $L^2(P_1^{-1}\, d\beta)$. On en déduit par la remarque de Herz que g est dans B.M.O. Alors d'après le corollaire 2.3

$$\Psi(F) = \int_N \int_0^{+\infty} VF(x, s) \cdot V(g * P_s(x))\, d\beta(x) \frac{ds}{s}$$

définit une forme linéaire continue sur H^1. De plus si $F \in H_0^1$ et f est sa valeur au bord on a d'après le lemme 3.1 $\Psi(F) = \int_N f(x)\, g(x)\, d\beta(x)$. Ψ coincide donc avec φ sur H_0^1 qui est dense dans H^1. C'est donc terminé et g est unique à une constante près.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. L. BURKHOLDER ET R. F. GUNDY, Distribution function inequalities for the area integral, *Studia. Math.* **49** (1972), 527–544.
2. R. R. COIFMAN ET G. WEISS, "Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes," Lectures Notes in Mathematics No. 242, Springer–Verlag, Berlin/New York.
3. R. R. COIFMAN ET G. WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569–645.

4. I. CYGAN, Fundamental solution of the heat equation on Heisenberg group, preprint, Institut des sciences mathématiques de l'Académie de Pologne.
5. A. DEBIARD, Comparaison des espaces H^p géométriques et probabilistes au dessus de l'espace hermitien hyperbolique, *Bull. Soc. Math. France* **103** (1979), p. 305–351.
6. A. DEBIARD, Intégrale d'aire de Caldéron Lusin et intégrale d'aire brownienne sur l'espace hermitien hyperbolique D de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **282** (1976), 1231–1232; Fonction de Littlewood–Paley et dualité H_1 B.M.O. dans le cas de l'espace hermitien hyperbolique de $\mathbb{C}^n n > 1$, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A* **290** (1980), 225–227.
7. R. E. EDWARDS ET E. HEWIT, Pointwise limits of convolution operators, *Acta Math.* **113** (1965), 181–218.
8. A. ERDELYI, "Asymptotic Expansions," Dover, New York, 1956.
9. C. FEFFERMAN ET E. STEIN, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137–193.
10. W. FELLER, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications," Vol. II, Wiley, New York, 1974.
11. B. GAVEAU, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta Math.* **139** (1977), 95–153.
12. J. B. GARNETT ET R. H. LATTER, The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables, *Duke Math. J.* **45**, No. 4 (1978), 815–845.
13. D. GELLER, Fourier analysis on the Heisenberg group, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **74**, No. 4 (1977), 1328–1331.
14. R. K. GETOOR ET M. I. SHARPE, Conformales martingales, *Invent. Math.* **16** (1972), 271–308.
15. S. HELGASON, "Differential Geometry and Symmetric Spaces," Pure and applied Math Séries Academic Press, New York, 1962.
16. F. JOHN ET L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 415–426.
17. N. KERZMAN, A property of unions of admissible domains, *in* "Proceedings Symposia in pure Math," Vol. 30, 1977, p. 175–179.
18. A. W. KNAPP, Fatou's theorem for symmetric spaces, I, *Ann. of Math.* (2) **86** (1968), 106–127.
19. A. KORANYI, Harmonic functions on hermitian hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 507–516.
20. A. KORANYI ET R. B. PUTZ, Local Fatou theorem and area theorem for symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **224**, No. 1 (1976), 157–168.
21. A. KORANYI ET S. VAGI, Singular integrals in homogeneous spaces and some problems of classical analysis, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **25**, No. 4 (1971), 575–648.
22. M. P. MALLIAVIN ET P. MALLIAVIN, "Factorisations et lois limites de la diffusion horizontale au dessus d'un espace riemannien symétrique, théorie du potentiel et analyse harmonique," Lectures Notes in Mathematics No. 404, pp. 164–217, Springer–Verlag, Berlin/New York, 1974.
23. P. A. MEYER, "Le dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$: démonstration probabiliste," Lecture Notes in Mathematics No. 581, pp. 132–195, Springer–Verlag, Berlin/New York, 1977.
24. S. A. MOLCHANOV, Processus de diffusion et géométrie riemannienne, *Uspekhi, Math. Nauk* **30** (1975), 3–59.
25. J. PÉRÈS, "Mécanique générale," Masson, Paris, 1962.
26. R. B. PUTZ, A generalised area theorem for harmonic functions on hermitian hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **168** (1972), 243–258.
27. E. M. STEIN, "Boundary Values of Holomorphic Functions of Several Complex Variables," Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1972.

28. E. M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton Mathematical Séries, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
29. S. R. S. Varadhan, Behaviour of the fondamental solution of the heat equation with variables coefficients, *Comm. Pure Appl. Math* **20** (1967), 431–455.
30. J. A. Wolf, Curvature in nilpotent Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc* **15** (1964), 271–274.
31. A. Zygmund, "Trigonometric Séries," Cambridge Univ. Press, London, 1959.
32. N. Varopoulos, B.M.O. functions and the $\bar{\partial}$-equation, *Pacific J. Math.* **71** (1977), 221–273.

Printed in Belgium